

Autorraleo: alternativa para determinar la pendiente de la relación lineal tamaño-densidad, mediante su impacto en la estimación del volumen del rodal

Self-thinning: alternative to determine the slope of the relationship size-density, by means of its impact on the estimation of stand volume

Ernesto Andenmatten

Instituto Nacional de Tecnología Agropecuaria, EEA Bariloche, Campo Forestal Gral. San Martín, Paraje Las Golondrinas, Lago Puelo, Chubut, Argentina, tel.: +54 9 294 4695856, eandenmatten@gmail.com

SUMMARY

Stand density indices are used to design production tables, density management diagrams and growth simulators and to establish thinning regimes, the most widespread being the Reineke stand index. Some species can be grouped with the same slope as indicated by Reineke, however there are works that propose making fits by species. There are different methodologies for this; which, in turn, can generate different values among themselves, even for the same sample available. An alternative is presented to determine the slope of the Reineke line, using another density index and the estimate of the stand volume. This is estimated using a multiple linear model, by making iterative changes in one of its variables, the stand density index according to Curtis. The evaluation is done observing the improvement of the statistical estimators of the relationship “observed volume vs. estimated volume”. The tests carried out on plantations of *Pinus contorta* in Patagonia differ from the results obtained in Oregon-USA; a difference that may correspond not only to the applied method, but also to the available sample. For *P. elliottii* and *P. taeda* in the Valley of Calamuchita, Argentina, results coincide with studies in their regions of origin. It is considered for the analyzed cases, that neither the difference nor the coincidence is enough to reject or accept the proposal definitively. Additionally, two alternatives are presented to establish the intercept of the line, one visual and one based on the statistical parameters of the sample.

Key words: Reineke stand-density index, Curtis density index, intraspecific competition, mortality.

RESUMEN

Los índices de densidad de rodal son utilizados para diseñar tablas de producción, diagramas de manejo de la densidad, simuladores de crecimiento y establecer regímenes de raleo, siendo el más difundido el índice de rodal de Reineke. Algunas especies pueden agruparse con una misma pendiente como lo señalado por Reineke, pero existen trabajos que proponen realizar ajustes por especie, existiendo para ello diferentes metodologías, que a su vez pueden generar valores diferentes entre sí, aún para una misma muestra disponible. Se presenta una alternativa para determinar la pendiente de la recta de Reineke, utilizando otro índice de densidad y la estimación del volumen del rodal. Este se estima mediante un modelo lineal múltiple, al realizar cambios iterativos en una de sus variables, el índice de densidad de rodal según Curtis. La evaluación se realiza observando la mejoría de los estimadores estadísticos de la relación “volumen observado vs. volumen estimado”. Las pruebas realizadas sobre plantaciones de *Pinus contorta* en Patagonia, difieren con los resultados obtenidos en Oregon-USA, diferencia que puede corresponder al método aplicado, pero también a la muestra disponible. Para *P. elliottii* y *P. taeda* en el Valle de Calamuchita, Argentina, los resultados coinciden con estudios llevados a cabo en sus regiones de origen. Se considera para los casos analizados, que ni la diferencia ni la coincidencia resultan suficientes para rechazar o aceptar en forma definitiva la propuesta. Adicionalmente, se presentan dos alternativas para establecer el intercepto de la recta, uno visual y otro basado en los parámetros estadísticos de la muestra.

Palabras clave: índice de densidad de Reineke, índice de densidad de Curtis, competencia intraespecífica, mortalidad.

INTRODUCCIÓN

La estimación de la pendiente del modelo lineal de Reineke (1933), aplicado en la descripción de la relación dinámica tamaño-densidad, ha sido abordada mediante diferentes metodologías. Chauchard *et al.* (1999) utilizaron componentes principales, en tanto que Santiago-García *et al.* (2013) mencionan la empírica, mínimos cuadrados ordi-

narios, y un método estadístico más reciente, el enfoque de la relación de frontera estocástica. En una aproximación diferente Vanclay y Sands (2009) aplicaron razones instantáneas entre los logaritmos del cambio en densidad y diámetro cuadrático medio, hasta definir la correspondiente a la frontera de autorraleo, momento en que la pendiente es máxima.

Las metodologías componentes principales, empírica y mínimos cuadrados tienen una carga subjetiva, propia de

cada método porque requieren una decisión relacionada con la inclusión o no de muestras que se consideren representativas de rodales en máxima densidad (Chauchard *et al.* 1999, Gezan *et al.* 2007). En tanto las metodologías de frontera estocástica y razones instantáneas utilizan todos los datos sin requerir una partición arbitraria de los mismos, con lo cual se evita la subjetividad y se mejora la eficiencia en situaciones de baja disponibilidad de información (Santiago-García *et al.* 2013). Hann (2014) presenta una profunda revisión al destacar las complicaciones que implican las diferentes metodologías y la muestra disponible en la determinación de la recta de máxima densidad o frontera de autorraneo.

No obstante las recomendaciones sobre la necesidad de reinterpretar la propuesta de Reineke que han realizado varios autores (Zeide 2005), y la evidencia de mejoría aportada por el empleo de modelos no lineales (Charru *et al.* 2012), la propuesta original en sí misma es muy aplicada en el desarrollo de diagramas de manejo de la densidad o bien en modelos de simulación de crecimiento y rendimiento utilizados para establecer regímenes de raleo, y al decir de Vanclay y Sands (2009), “la frontera de autorraneo se asemeja a un agujero negro, no es visible directamente, pero puede inferirse indirectamente a partir de la muerte de los individuos a medida que el rodal se aproxima a la frontera”. Por otra parte, existe amplia evidencia relacionada a la conveniencia de establecer parámetros propios de la recta para cada especie, como una opción superadora de la aplicación de parámetros de uso universal (Charru *et al.* 2012, Chauchard y Dorronsoro 2013).

El primer objetivo de este trabajo es presentar evidencia sobre la posibilidad de estimar la “pendiente” del mo-

delo rectilíneo de Reineke, mediante un proceso iterativo, donde la elección del valor más conveniente se relaciona con la mejor estimación del volumen agregado del rodal, y como segundo objetivo, plantear dos alternativas para establecer el intercepto de dicho modelo.

MÉTODOS

Área de estudio y datos. Se utilizó información proveniente de parcelas de *Pinus contorta* var. *contorta* Dougl., cultivado en la región Andino Patagónica de Argentina, en las provincias de Neuquén, Río Negro y Chubut, y de *Pinus elliottii* var. *elliottii* Engelm. y *Pinus taeda* L., cultivados en el Valle de Calamuchita, provincia de Córdoba, cuyos parámetros descriptivos se detallan en el cuadro 1.

En todos los casos las muestras se seleccionaron con el criterio de captar la máxima variabilidad posible, al considerar distribución geográfica, calidad de sitio, altura dominante del rodal, densidad, edad, y situaciones con y sin raleo. Las parcelas, monoespecíficas y coetáneas por plantación, fueron mayoritariamente de 400 m², midiendo el total de diámetros normales a 1,30 m sobre el nivel del suelo (diámetro mínimo 50 mm), con una submuestra de alturas y edad a la altura del pecho. Para cada parcela se estableció la relación funcional altura individual-DAP, con la cual posteriormente se estimó la altura de cada individuo de la parcela. Mediante una función de volumen estándar ajustada para cada especie se estimaron los volúmenes individuales, y por sumatoria se obtuvo el volumen total de la parcela. Los datos de cada parcela se extrapolaron a valores por hectárea obteniendo los parámetros usuales

Cuadro 1. Resumen de datos descriptivos* de la muestra de parcelas, por especie.

Summary of descriptive data of the sample of plots, by species.

Especie	Estadísticos	Sup.	N	G	Dg	V	EAP	H	IS ₂₀ /IS ₁₅
<i>Pinus contorta</i> (n = 51)	Media	346	1.178	34	20,3	240	23	14,3	12
	D.E.	76	544	12	5,2	125	6	4,6	3
	Mínimo	174	276	10	11,2	43	12	7,3	8
	Máximo	502	2.577	63	34,3	570	32	25,8	17
<i>Pinus elliottii</i> (n = 96)	Media	336	740	37	26,9	358	21	19,1	15
	D.E.	135	387	13	5,8	157	6	4,6	2
	Mínimo	100	154	9	15,6	45	6	7,5	10
	Máximo	844	1.800	70	42,2	765	34	29,2	19
<i>Pinus taeda</i> (n = 37)	Media	357	641	35	28,1	310	23	18,9	14
	D.E.	75	317	11	6,6	144	7	4,4	2
	Mínimo	100	161	10	15,6	46	8	8,8	11
	Máximo	436	1.480	53	47,0	593	31	28,4	19

* Sup.: superficie de la parcela (m²), N: número de plantas vivas por hectárea (plantas/ha), G: área basal (m²/ha), Dg: diámetro cuadrático medio (cm), V: volumen agregado de rodal (m³/ha), H: altura dominante (m), IS(20): índice de sitio (m), con edad de referencia 20 años estimada a la altura del pecho, para *P. contorta*, IS(15): índice de sitio (m) con edad de referencia 15 años total, para *P. elliottii* y *P. taeda*. D.E.: desviación estándar.

altura dominante (H), área basal (G), número de individuos (N), diámetro cuadrático medio (Dg) y volumen del rodal (V).

Determinación de la pendiente del modelo rectilíneo de Reineke. Curtis (1982) presentó “un simple índice de densidad de rodal (DR) para *Pseudotsuga menziesii* (Mirb. Franco)”, en el que se destaca la facilidad de cálculo, y la relación con el modelo rectilíneo de Reineke (1933). Para ello partió de la expresión [1] propuesta por Reineke (1933):

$$\log N = a_0 + c \times \log Dg \quad [1]$$

Donde: N: número de plantas del rodal por unidad de superficie (plantas/hectárea), Dg: diámetro cuadrático medio (cm), log: logaritmo en base decimal, “a₀” y “c”: parámetros de la ecuación.

Reineke (1933) en su estudio estableció un valor único de pendiente para 12 de las 14 especies consideradas, “c = -1,605”, e insinuó que este valor podría ser una constante universal para muchas especies forestales¹. Posteriormente, Curtis definió el índice de densidad del rodal según [2]:

$$DR = \frac{G}{Dg^b} \quad [2]$$

Donde: DR: índice de densidad de rodal según Curtis, G: área basal (m²/ha), Dg: diámetro cuadrático medio (cm), “b”: único parámetro de la ecuación.

Para los coeficientes de la ecuación [2] se mantuvieron las abreviaturas empleadas en el trabajo original de Curtis, a efectos de facilitar la relectura y comprensión del mismo. En el desarrollo del índice, Curtis (1982) puso de manifiesto que la relación entre ambas expresiones de la densidad del rodal [1] y [2], está dada en sus parámetros (anexo 1) según [3]:

$$b = c + 2 \quad [3]$$

De esta manera, Curtis dedujo: $b = -1,605 + 2 = 0,395$, aplicable cuando no exista mejor información para la especie, aunque de acuerdo con datos disponibles, mencionó como posibilidad que según la especie el coeficiente podría variar entre 0,3 a 0,5. También mencionó, que el máximo valor alcanzable por DR diferiría entre especies, adelantando lo que mucha evidencia actual confirma.

¹ Reineke (1933) puntualizó que algunas especies se apartaban de la recta de pendiente -1,605, como, por ejemplo, *Pinus elliotii*, indicando que se requería de futuros ajustes para otras especies. Pero insistió en la “universalidad del concepto”, destacando su simplicidad e independencia respecto a la edad y calidad de sitio. Al respecto, Doruska (2003) estableció la pendiente para *P. elliotii*: “c = -2,048”, confirmado a la diferencia anticipada por Reineke para esta especie.

Por otra parte Mitchell y Cameron (1985) para estimar el volumen agregado del rodal, utilizaron la ecuación [4]:

$$V = m_1 \times H^{m_2} \times DR^{m_3} \quad [4]$$

Donde: V: volumen agregado del rodal (m³/hectárea), H: altura dominante (m), DR: índice de densidad del rodal de Curtis, m₁, m₂ y m₃: parámetros de la ecuación.

Si bien se han logrado buenos resultados al aplicar el valor de 0,5 del coeficiente del DR a varias especies, *Pseudotsuga menziesii* en su región de origen (Mitchell y Cameron 1985), en Argentina para *Pseudotsuga menziesii* y *Pinus ponderosa* Dougl. ex Laws (Andenmatten y Letourneau 1997), *P. contorta* (Andenmatten y Getar 2017), *P. elliotii* y *P. taeda* (Andenmatten et al. 2014), y en España para *Pinus radiata* D. Don (Chauchard 2000), se observó que en ciertas situaciones se presentaron desvíos en alguna porción de la estimación. Ante esta observación y dado el peso que tiene el índice de densidad relativa en la ecuación [4], se decidió realizar pruebas para seleccionar el valor más conveniente de “b” para cada especie bajo el siguiente procedimiento:

- a) Para cada parcela de la muestra se determina el valor de DR aplicando “b = 0,5”. De esa manera para cada parcela se dispondrá de los parámetros observados V y H, y el DR_{0,5} calculado usando dicho valor de “b”.
- b) Para el total de la muestra se ajustan los parámetros de la ecuación de volumen de rodal [4], y se determina como indicador de calidad de ajuste el criterio de Akaike (AIC) (Di Rienzo et al. 2013). Con los parámetros ajustados se calcula el volumen de cada parcela ($Vest_{0,5} = f(H, DR_{0,5})$).
- c) Se realiza una autovalidación ajustando la relación lineal Vobservados-Vestimados_{0,5}.
- d) Se retoma el “paso a”, con un nuevo valor del coeficiente “b”, por ejemplo “b = 0,8”, obteniendo DR_{0,8}. Se dispondrá de los valores observados Vobs y H, que no se modifican, y DR_{0,8} para cada parcela de la muestra. Se repite el “paso b” ajustando nuevos parámetros para la ecuación [4] obteniendo AIC como indicador de bondad de ajuste, calculando para cada parcela su volumen estimado ($Vest_{0,8} = f(H, DR_{0,8})$), y luego se repite el “paso c” obteniendo los indicadores de calidad de ajuste de la recta Vobs-Vest_{0,8}.
- e) Se repiten nuevas estimaciones de DR_# para valores de “b”, que pueden elegirse según la tendencia que irá marcando AIC y el análisis del intercepto, pendiente y R² de las rectas ajustadas Vobs-Vest_#.
- f) Se selecciona como mejor valor de “b”, el que proporciona el mejor modelo de volumen de rodal, seleccionado porque presente un mínimo valor de AIC, y al mismo tiempo el intercepto de la recta tienda a cero y la pendiente y R² tiendan a uno (Vanclay 1994). De manera complementaria, se realiza un análisis visual de residuales (Huang et al. 2003).

A partir de la estimación del mejor valor de “b”, y despejando y reordenando la ecuación [3], se podrá estimar el valor de la pendiente de Reineke mediante la ecuación [5], parámetro que constituye el primer objetivo de este trabajo:

$$c = b - 2 \quad [5]$$

Intercepto de la recta de Reineke. Obtenida la pendiente de la recta, la posición quedará definida al establecer el intercepto de la misma (Vospersnik y Sterba 2014), siendo de gran importancia porque en definitiva tendrá fuerte impacto en la determinación del número de individuos del rodal (Reineke 1933). Cuando se utiliza la metodología empírica para establecer la recta de Reineke (1933), la ordenada o intercepto se obtiene mediante un proceso “visual”, que consiste en graficar los puntos disponibles, y sobreponerle una recta con la pendiente “c” estimada, desplazándola hasta coincidir con el borde superior de la nube de puntos. Luego, se puede obtener el valor del intercepto cuando la recta corta al eje de ordenadas.

Es factible aplicar un procedimiento alternativo con base estadística. Para determinar el DR considerado máximo biológico de cada especie, se obtienen de la muestra disponible los valores del índice de densidad de Curtis, utilizando el valor de “b” seleccionado. Del total de la muestra se calculan el promedio y desvío estándar (D.E.), y mediante la ecuación [6] (Andenmatten 1999) se calcula el valor de DR considerado como el máximo biológico de la especie:

$$DR_{\text{máximo}} = DR_{\text{promedio}} + 2 \times D.E. \quad [6]$$

Utilizar dos desvíos estándar, implica un valor del borde de la distribución de frecuencias, sin alcanzar lo que se acepta habitualmente como “valores estadísticamente raros”, que sería el caso de tomar tres desvíos estándar.

A partir de esta determinación, se puede demostrar (Andenmatten 2017) que mediante deducciones matemáticas a partir de la ecuación que define el índice de densidad de Curtis, el valor de N puede ser determinado mediante la ecuación [7] si se conocen previamente los valores de DR y Dg:

$$N = \frac{40.000}{\pi} \times DR \times Dg^{(b-2)} \quad [7]$$

Utilizando en [7] el DR_{máximo} de la especie, y como diámetro de referencia Dg = 25 cm, se tendrá un punto de la recta de Reineke (N_{máximo}, Dg = 25 cm). Luego, conociendo un punto de una recta y la pendiente de la misma, mediante [8 y 9] se puede deducir el valor de intercepto (a₀):

$$\log(N) = a_0 + c \times \log(25) \quad [8]$$

De donde:

$$a_0 = \log(N) - c \times \log(25) \quad [9]$$

RESULTADOS

Determinación de la pendiente del modelo rectilíneo de Reineke. Se presentan algunos de los ajustes, seleccionados arbitrariamente, de la recta de V_{observado} vs. V_{estimado} (figura 1), al solo efecto de poner de relieve el cambio gradual que se logra a medida que se va perfeccionando la selección del mejor DR (mejor valor del coeficiente “b”), indicando los parámetros de la ecuación de la recta de ajuste y su R².

Para el caso de las parcelas de *P. contorta*, arbitrariamente se inició el ajuste de la ecuación [4] empleando los valores del coeficiente “b” 0,8, 0,5, y 0,395 para el cálculo de los índices DR. De estos tres valores se determinó que el mejor ajuste correspondía para DR cuando “b = 0,395”. Observando la tendencia decreciente de la serie de valores de AIC (anexo 2), que indica una mejoría en la determinación del volumen estimado, se decidió continuar probando nuevos valores decrecientes de “b” (0,3 a 0,0) repitiendo el proceso de ajuste de la función de volumen.

Los resultados se presentan en el anexo 2, y de su análisis resultó que el mejor valor correspondió a “b = 0,15” que presenta un AIC un poco mayor que para “b = 0,13”, pero con mejores valores de intercepto y pendiente, y difieren en el R² en una diezmilésima, lo cual poco puede aportar en la selección de un valor por sobre otro. Más allá de la subjetividad entre seleccionar un valor de “b” de 0,15 o 0,13 o cualquiera de los valores cercanos, es evidente que en ese rango se produce el mínimo valor de AIC, y al mismo tiempo los mejores valores de ordenada, pendiente y R², para luego desmejorar al seguir probando valores menores de “b” (0,13 > b > 0).

De este resultado puede establecerse mediante [5], el valor que corresponde a la pendiente de la recta de Reineke, para *P. contorta* en la región de este estudio:

$$c = 0,15 - 2 = -1,85$$

Para *P. elliotii* se presentan en el anexo 2 los resultados de ajuste de la función de volumen agregado y relación lineal entre “volumen observado” vs. “volumen estimado”. De estos resultados y siguiendo el criterio planteado, puede establecerse mediante [5], el valor que corresponde a la pendiente de la recta de Reineke, para *P. elliotii* en la región de este estudio:

$$c = -0,05 - 2 = -2,05$$

Para *P. taeda* y siguiendo el criterio se presentan en el anexo 2 los parámetros e indicadores de bondad de ajuste, y puede establecerse mediante [5], el valor que corresponde a la pendiente de la recta de IDR, para *P. taeda* en la región de estudio:

$$c = -0,15 - 2 = -2,150$$

En la figura 2 se representan las distribuciones de los pares log(Dg) - log(N) de las tres especies analizadas y

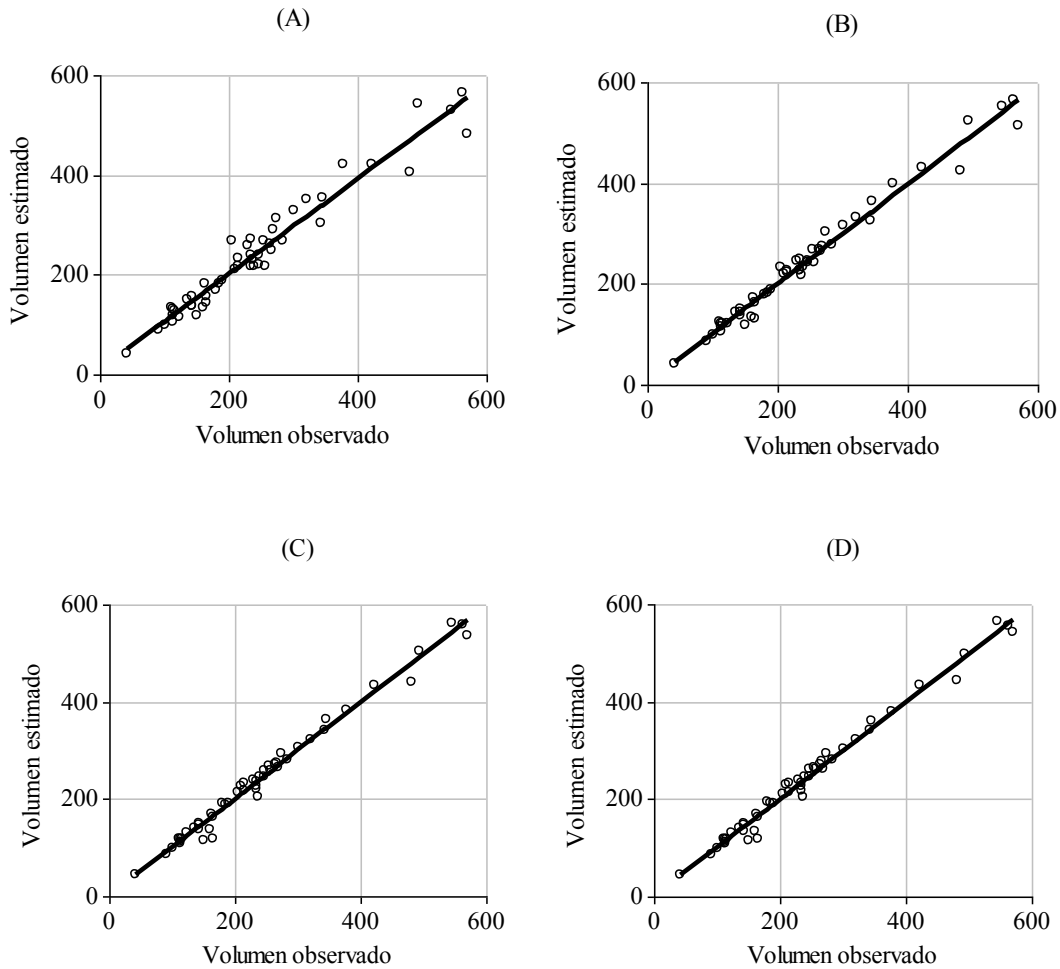


Figura 1. *Pinus contorta*: relación lineal entre Volumen observado (m^3/ha) vs. Volumen estimado (m^3/ha), utilizando diferentes valores del parámetro “b” para estimar cada valor de DR: (A): $V = f(H, DR_{0,8})$, (B) $V = f(H, DR_{0,395})$, (C) $V = f(H, DR_{0,15})$ y (D) $V = f(H, DR_{0,10})$. El mejor ajuste corresponde a (C), y en el anexo 2 pueden consultarse los parámetros de cada recta ajustada, su R^2 y el valor de AIC.

Pinus contorta: linear relationship between “observed volume (m^3/ha)” vs. “estimated volume (m^3/ha)”, using different values of the parameter “b”. (A): $V = f(H, DR_{0,8})$, (B) $V = f(H, DR_{0,395})$, (C) $V = f(H, DR_{0,15})$ and (D) $V = f(H, DR_{0,10})$. The best fit corresponds to (C). In annex 1, the parameters of each fitted line, its R^2 and the AIC value can be consulted.

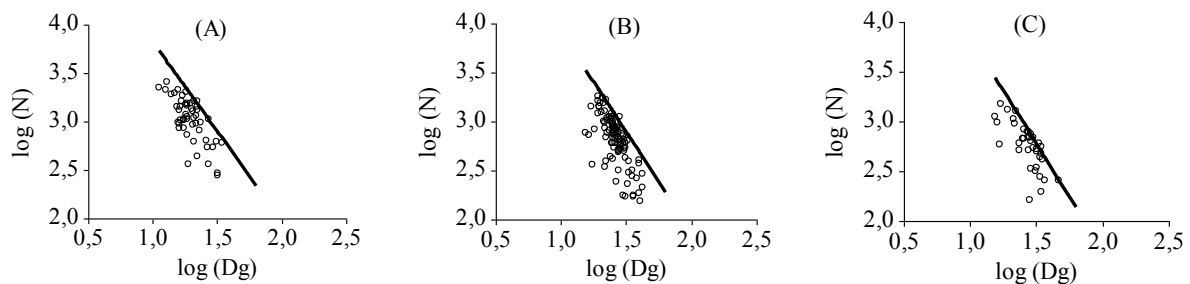


Figura 2. Relación $\log(Dg)$ vs. $\log(N)$ para los datos observados y el ajuste de la recta de Reineke: (A) *P. contorta*, pendiente - 1,85 e intercepto 5,6739 ($n = 51$), (B) *P. elliottii*, pendiente - 2,05 e intercepto 5,9708 ($n = 96$), y (C) *P. taeda*, pendiente - 2,15 e intercepto 6,0055 ($n = 37$). $\log(N)$: logaritmo en base 10 del número de plantas por hectárea, $\log(Dg)$: logaritmo en base 10 del diámetro cuadrático medio (cm).

Relationship $\log(Dg)$ vs. $\log(N)$ for the observed data and the fit of the Reineke line: (A) *P. contorta*, slope -1.85 and intercept 5.6739 ($n = 51$); (B) *P. elliottii*, slope -2.05 and intercept 5.9708 ($n = 96$); and (C) *P. taeda*, slope -2.15 and intercept 6.0055 ($n = 37$).

la posición que toma la correspondiente recta determinada para cada especie.

Intercepto de la recta de Reineke. La determinación del intercepto se realizó de manera “visual”, para lo cual se desplazó una recta con la pendiente “c” determinada hasta que coincidió con los puntos más extremos de la nube de puntos. La decisión de cuántos puntos dejar por afuera de la recta es absolutamente subjetiva, y los valores de intercepto así definidos se presentan en el cuadro 2.

En el cuadro 2 se presenta el número de individuos que corresponde para un diámetro de referencia $D_g = 25\text{cm}$, es decir el IDR, determinado cuando la recta se aproxima a la nube de puntos de manera empírica, y el correspondiente a la determinación de DR mediante el promedio y desvío estándar de la nube de puntos (muestra disponible). También se presentan para ambas determinaciones, los valores de ordenada que corresponden al intercepto de la recta de Reineke.

DISCUSIÓN

Determinación de la pendiente del modelo rectilíneo de Reineke. La propuesta resultó satisfactoria para las tres especies probadas, con valores de pendiente “c” similares a los determinados para las mismas especies en su región de origen en algunos estudios.

Para *P. contorta* Cochran y Dahms (2000) (página 2) utilizaron un coeficiente de -1,74 para Oregon Central, USA, en tanto Wykoff *et al.* (1982) utilizaron un coeficiente -1,76 en la implementación del simulador Prognosis. La diferencia -1,85 a -1,74 puede deberse a múltiples causas, como la metodología de ajuste, ya que Cochran y Dahms (2000) utilizaron mínimos cuadrados ordinarios, o bien a la muestra disponible, donde juega un papel importante el diámetro mínimo de inventario, o el criterio de selección de parcelas (Hann 2014). Por otra parte, es probable que la diferencia encontrada, no sea significativa y esté comprendida en la banda de confianza alrededor de la media ($c = -1,74$).

En el caso de *P. elliotii* el valor de pendiente “ $c = -2,05$ ” es similar al determinado por Doruska (2003), “ $c = -2,048$ ”,

aunque esta coincidencia por el momento solo debería considerarse como un aliciente para corroborar la validez de la presente propuesta, pero no como un dato definitivo, ya que existe evidencia sobre la variabilidad en la estimación del parámetro pendiente, afectada entre otros factores por la muestra disponible (Doruska, $n = 1.638$ vs. este estudio $n = 96$), por la elección del diámetro mínimo de inventario, y por la metodología de estimación.

Por último, para *P. taeda* donde “ $c = -2,15$ ” es un valor similar al determinado por VanderSchaaf y Burkhart (2006) (página 71, tabla 3.2), donde “ $c = -2,124$ ” ($n = 416$), utilizando mínimos cuadrados ordinarios. Estos autores desarrollaron un extenso trabajo, donde se destacan varios de los aspectos mencionados en cuanto a la variabilidad en la determinación de la pendiente, según el método de ajuste que se aplique, o cuando cambian elementos que el autor elige subjetivamente. Al igual que lo mencionado para *P. elliotii*, la coincidencia debería tomarse con prudencia hasta que nuevos estudios puedan corroborar la validez de las determinaciones, a la luz de trabajos que minimicen las fuentes de variación propias de los métodos y material utilizados.

Las diferencias de resultados según métodos de estimación de la pendiente, selección de la muestra y variaciones en las condiciones de sitio fueron discutidas por Hann (2014), mencionando que se obtienen resultados que pueden diferir notablemente según la combinación que se haga de ellas. En la presente propuesta, al utilizar como variable de control el volumen agregado del rodal, se evitan problemas de falta de independencia señalados por Huang *et al.* (2003), y por otra parte, se logra una fuerte compatibilidad con el volumen agregado de rodal, que es la principal variable utilitaria que puede predecirse en base a estos índices (Mitchell y Cameron 1985). También se evita una partición subjetiva de la muestra, donde definir qué parcelas están en condiciones de máxima competencia puede llevar a cometer errores de asignación, generando sesgos difíciles de detectar (Hann 2014).

Más allá de las dificultades y prevenciones señaladas por Hann (2014), las objeciones de Zeide (2005), las propuestas de utilizar modelos no lienes (Charrú *et al.*

Cuadro 2. Resumen de valores de N correspondiente al índice de densidad de rodal de Reineke, cuando se utiliza $D_g = 25\text{ cm}$, y valores de intercepto.

Summary of N values corresponding to the Stand Density Index by Reineke, when $D_g = 25\text{ cm}$ is used.

Especie	IDR (visual)	IDR [7]	a_0 (visual)	a_0 [9]
<i>Pinus contorta</i>	1.221,7304	1.221,7333	5,6739	5,6732
<i>Pinus elliotii</i>	919,3263	919,3241	5,9708	5,8292
<i>Pinus taeda</i>	1.212,6288	1212,6559	6,0055	6,0893

“visual”: se refiere a la estimación de la recta por ajuste visual de la misma a la nube de puntos, [7]: se refiere a la determinación aplicando la ecuación [7], “ a_0 ”: intercepto de la recta de Reineke, [9] determinado aplicando la ecuación [9]. Tanto N como a_0 se presentan con “cuatro” decimales a efectos de poner de relieve la similitud entre ambas metodologías.

2012), queda latente el valor de la propuesta original de Reineke (1933), la simplificación introducida por Curtis (1982), y el valor utilitario señalado por Mitchell y Cameron (1985) en la estimación del crecimiento y rendimiento de rodales forestales.

Intercepto de la recta de Reineke. Para las tres especies utilizadas en este estudio, ambas metodologías aplicadas para su determinación arrojaron resultados similares. Sin embargo, el método “visual” puede arrojar diferentes valores para una misma muestra, lo cual dependerá del operador por la carga subjetiva que implica. Al mover la recta en relación a la nube de datos, la decisión relacionada a qué valores de la nube de datos quedarán por fuera de la recta será siempre opinable, y equivale a juzgar a simple vista, qué muestras se consideran por sobre la frontera delimitada como máximo biológico de la especie, quedando aquellas muestras en una situación de excepción. En el método basado en los parámetros estadísticos de la distribución de frecuencias del índice de densidad según Curtis, es opinable el hecho de establecer dos desvíos estándar para su cálculo, pero, una vez establecido, deja de ser subjetivo ya que será repetible por cualquier operador para la misma muestra, y siempre arrojará el mismo resultado. Un enfoque similar aplicaron Gezan *et al.* (2007) utilizando el IDR en bosques nativos de Chile, aplicando 1,96 desvíos estándar.

Como expresan Vospernik y Sterba (2014), pequeñas diferencias en la estimación del intercepto de la recta de Reineke generarán un importante cambio en la estimación del valor máximo del índice de densidad. En el presente caso, ambas metodologías coinciden en la estimación del intercepto para cada especie, lo cual implica que su impacto en la estimación del número de individuos para un cierto diámetro será similar, aunque aclaran que el intercepto podría variar con la condición de sitio de parcela a parcela.

CONCLUSIONES

La variante presentada para determinar la pendiente de la recta del índice de densidad de rodal de Reineke, mediante el ajuste iterativo del coeficiente asociado al índice de densidad de rodal de Curtis, evaluado mediante su impacto en la estimación de volumen agregado de rodal, abre un nuevo panorama, siendo de simple aplicación y fácil evaluación. Por otra parte, vincula a la clásica relación tamaño-densidad, cuando se utiliza el diámetro cuadrático medio como manifestación del tamaño medio, con la variable de mayor interés utilitario, el volumen del rodal.

Se confirma que la pendiente asociada a la recta de Reineke es un parámetro que debería ajustarse para cada especie en particular, más allá que pueda coincidir para un grupo de especies, y queda abierta la posibilidad de contrastar la metodología, contra las propuestas de ajustes no lineales, para lo cual será necesario un nuevo desarrollo deductivo que relacione los parámetros de las ecuaciones implicadas. Lo mismo puede decirse en un contraste entre

metodologías de estimación de la relación lineal, que implique los ajustes empírico, componentes principales, mínimos cuadrados ordinarios, ajuste de frontera estocástica, y razones de cambio instantáneo. Posiblemente se requerirá un trabajo de colaboración entre grupos de diferentes países, por la dificultad que implica disponer información comparable, y en lo posible de largo intervalo de medición, ya sea para el ajuste de los parámetros o en la etapa de validación de predicciones.

La comparación entre las dos variantes utilizadas para determinar el intercepto de la recta, dieron valores similares entre sí, pero se resalta que la variante que aplica los parámetros estadísticos de la muestra disminuye la carga de subjetividad que conlleva el método visual.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se enmarca en el Programa Forestal, Proyecto Específico PNFOR 1104074 “Desarrollo de modelos de crecimiento y producción forestal”, Instituto Nacional de Tecnología Agropecuaria, Argentina.

REFERENCIAS

- Andenmatten E. 1999. Proyección de Tablas de Rodal para Pino Oregón en la región Andino Patagónica de las Provincias de Chubut y Río Negro, Argentina. Tesis Magister en Ciencias. Valdivia Chile. Universidad Austral de Chile. 79 p. <http://www.forestal.uach.cl/postgrado/magister-recursos-forestales/tesis.php>
- Andenmatten E. 2017. Algoritmo para predecir mortalidad y proyectar parámetros descriptivos del rodal, basado en índices de densidad. Bariloche, Argentina. INTA, EEA Bariloche. 19 p. (Comunicación Técnica N°59). https://inta.gob.ar/sites/default/files/inta_mortalidad_18_de_agosto_2017.pdf
- Andenmatten E, FJ Letourneau. 1997. Tablas de volumen de rodal para *Pseudotsuga menziesii* (Mirb.) Franco y *Pinus ponderosa* (Dougl.) Laws de aplicación en la región andino-patagónica de las provincias de Chubut y Río Negro, Argentina. In Ortega A, S Gezan eds. Modelling growth of fast-grown tree species. IUFRO Conference. Sept. 3-5, 1997, Valdivia, Chile. p. 146-154.
- Andenmatten E, FJ Letourneau, N De Agostini. 2014. Funciones dasométricas e índices de densidad para el manejo de pinos ellioti y taeda en el Valle de Calamuchita, Córdoba, Argentina. Bariloche, Argentina. INTA, EEA Bariloche. 7 p. (Comunicación Técnica N°53).
- Andenmatten E, EJD Getar. 2017. Piltriquitrón 3.0: simulador para el procesamiento de parcelas forestales, con trozado definido por el usuario. En Patagonia: *Pseudotsuga menziesii*, *Pinus ponderosa* y *P. contorta*. En Calamuchita: *P. ellioti* y *P. taeda*. Bariloche, Argentina. INTA, EEA Bariloche. 19 p. (Comunicación Técnica N°58).
- Charru M, I Seynave, F Morneau, M Rivoire, JD Bontemps. 2012. Significant differences and curvilinearity in the self-thinning relationships of 11 temperate tree species assessed from forest inventory data. *Annals of Forest Science* 69:195-205. DOI [10.1007/s13595-011-0149-0](https://doi.org/10.1007/s13595-011-0149-0)
- Chauchard LM. 2000. Crecimiento y producción de repoblacio-

- nes de *Pinus radiata* D. Don en la provincia de Guipúzcoa (País Vasco). Tesis de Doctorado. Madrid, España. Universidad Politécnica de Madrid. 184 p. http://oa.upm.es/view/subjects/silvicultura.html#group_C
- Chauchard LM, V Dorronsoro. 2013. Influencia de los parámetros de los diagramas de manejo de la densidad en la planificación selvícola. In Sociedad Española de Ciencias Forestales ed. 6º Congreso Forestal Español: Montes, Servicios y Desarrollo rural. Vitoria-Gasteiz, España. 12 p. http://secforestales.org/publicaciones/index.php/congresos_forestales/issue/view/280
- Chauchard LM, R Sbrancia, M González, L Maresca, A Rabino, M Mazzuchelli. 1999. Aplicación de leyes fundamentales de la densidad a bosques de Nothofagus: ii. línea de inicio de la competencia y diagramas de manejo de la densidad. *Bosque* 22(1): 3-10. <http://mingaonline.uach.cl/pdf/bosque/v22n1/art01.pdf>
- Cochran PH, WG Dahms. 2000. Growth of Lodgepole Pine Thinned to Various Densities on Two Sites With Differing Productivities in Central Oregon. PNW-RP-520. Portland, USA. U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Pacific Northwest Research Station. 59 p. <https://www.fs.fed.us/pnw/pubs/rp520.pdf>
- Curtis RO. 1982. A Simplex Index of Stand Density for Douglas-fir. *Forest Science* 28(1): 92-94. <https://www.fs.usda.gov/treearch/pubs/7202>
- Di Rienzo JA, F Casanoves, MG Balzarini, L Gonzalez, M Tablada, CW Robledo. 2013. InfoStat versión 2013. Grupo InfoStat, FCA, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. <http://www.infostat.com.ar/>
- Doruska PF. 2003. Development of a stand density index equation for slash pine (*Pinus elliottii* Englem.). In U.S. Department of Agriculture, Forest Service, North Central Research Station ed. Proceedings of the 3rd Annual FIA Symposium (meeting jointly with the 35th Midwest Mensurationist Meeting). St. Paul, USA. p. 202-206. (Gen. Tech. Rep. NC-230). <https://www.fs.usda.gov/treearch/pubs/14447>
- Gezan S, A Ortega, E Andenmatten. 2007. Diagramas de manejo de densidad para renales de roble, raulí y coigüe en Chile. *Bosque* 28(2): 97-105. https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0717-92002007000200002&lng=en&nrm=iso&tlng=en
- Hann DW. 2014. Modeling of the Maximum Size-Density Line and Its Trajectory Line for Tree Species: Observations and Opinions. Corvallis, USA. Oregon State University. 34 p. (Forest Biometrics Research Paper 5). https://www.researchgate.net/profile/David_Hann2
- Huang S, Y Yang, Y Wang. 2003. Critical Look at Procedure for Validating Growth and Yield Models. In Amaro A, D Reed, P Soares eds. Modelling Forest Systems. CAB International. 23 p. https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-31304-4_12
- Mitchell K, I Cameron. 1985. Managed Stand Yield Tables for Coastal Douglas-fir: Initial Density and Precommercial Thinning. Victoria, Canada. B.C. Min. of For. Res. Branch. 69 p. (Land Management Report N° 31). <https://www.for.gov.bc.ca/HFD/Pubs/Docs/Mr/Lmr031.htm>
- Reineke LH. 1933. Perfecting a stand-density index for even aged forests. *Journal of Agricultural Research* 46: 627-638. <https://naldc.nal.usda.gov/download/IND43968212/PDF>
- Santiago-García W, HM de los Santos-Posadas, G Ángeles-Pérez, JR Valdez-Lazalde, DH Del Valle-Paniagua, JJ Corral-Rivas. 2013. Auto-aclareo y guías de densidad para *Pinus patula* mediante el enfoque de regresión de frontera estocástica. *Agrociencia* 47: 75-89. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-31952013000100007
- Vancly JK. 1994. Modelling Forest Growth and Yield-Application to Mixed Tropical Forests. Wallingford, UK. CAB International. 312 p. https://epubs.scu.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?referer=https://www.google.com/&httpsredir=1&article=1538&context=esm_pubs
- Vancly JK, PJ Sands. 2009. Calibrating the self-thinning frontier. *Forest Ecology and Management* 259(1): 81-85. https://www.researchgate.net/publication/45872934_Calibrating_the_self-thinning_frontier
- VanderSchaaf CL, H E Burkhart. 2006. Comparison of methods to estimate Reineke's maximum size-density relationship species boundary line slope. *Forest Science* 53(3):435-442. <https://www.fs.usda.gov/treearch/pubs/35891>
- Vospertnik S, H Sterba. 2014. Do competition-density rule and self-thinning rule agree? *Annals of Forest Science* 72:379-390. DOI [10.1007/s13595-014-0433-x](https://doi.org/10.1007/s13595-014-0433-x)
- Wykoff WR, Crookston NL, Stage AR. 1982. User's Guide to the Stand Prognosis Model. Ogden, USA. United States Department of Agriculture, Forest Service. Intermountain Forest and Range Experiment Station. 118 p. (General Technical Report INT-133). https://www.fs.fed.us/fmrc/ftp/fvs/docs/gtr/prognosis_guide.pdf
- Zeide B. 2005. How to measure stand density. *Trees* 19: 1-14. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00468-004-0343-x>

Recibido: 13/09/18

Aceptado: 18/04/19

Anexo 1. Relación entre los parámetros de la ecuación lineal de Reineke y el índice de densidad de Curtis.

Relationship between the parameters of the Reineke and Curtis density indices.

Curtis (1982) planteó la relación entre los parámetros de la recta de Reineke (IDR) y el índice de densidad de rodal de Curtis (DR), pero sin presentar el despeje matemático correspondiente, que se presenta aquí a partir de las expresiones matemáticas utilizadas. Según Reineke (1933), la recta de la relación tamaño-densidad se expresa por:

$$\log(N) = \log(a_0) + c \times \log(Dg)$$

Quitando logaritmos puede expresarse como:

$$N = a_0 \times (Dg^c)$$

Por otra parte el área basal del rodal (G (m²/ha) se puede expresar conociendo el área basal (g_{Dg} (m²)) del árbol que corresponde al diámetro cuadrático medio (Dg (cm)) y el número de individuos (N (plantas/hectárea)), siendo 10.000 el factor de conversión para pasar de unidades (cm) a (m²):

$$g_{Dg} = \frac{\pi}{4} \times \frac{Dg^2}{10.000}$$

$$G = \frac{\pi}{4} \times \frac{Dg^2}{10.000} \times N$$

Haciendo:

$$k = \frac{\pi}{4 \times 10.000}$$

Finalmente

$$G = k \times Dg^2 \times N$$

Luego se puede reemplazar N :

$$G = k \times Dg^2 \times a_0 \times Dg^c$$

Haciendo la constante $a_1 = (k \times a_0)$, y sumando los exponentes de los factores de una misma base, queda:

$$G = a_1 \times Dg^{c+2}$$

Y agrupando la suma de exponentes se puede expresar:

$$G = a_1 \times Dg^b$$

De lo cual:

$$b = c + 2$$

Y despejando:

$$c = b - 2$$

Con lo cual queda explícita la relación entre ambos índices de densidad de rodal, de Reineke y Curtis.

Anexo 2. Evolución de los parámetros de la función de volumen agregado, y de la relación lineal Volumen observado vs. Volumen estimado.

Evolution of the parameters of the aggregated volume function, and of the relationship volume observed vs. predicted.

Sp.	DR#	Parámetros de la función de volumen agregado de rodal				Relación lineal Volumen observado vs. estimado		
		m_1	m_2	m_3	AIC	Intercepto	Pendiente	R ²
<i>Pinus contorta</i>	DR _{0,80}	4,2574	1,1594	0,8127	490,9086	10,243	0,9558	0,9502
	DR _{0,395}	2,3257	0,9104	0,9316	447,0749	2,9652	0,9860	0,9790
	DR _{0,20}	1,7003	0,7799	0,9708	429,3938	1,2455	0,9928	0,9852
	DR _{0,17}	1,6213	0,7599	0,9753	428,2000	1,1153	0,9935	0,9855
	DR _{0,16}	1,5960	0,7532	0,9766	427,9330	1,1024	0,9932	0,9856
	DR _{0,15}	1,5710	0,7470	0,9780	427,7350	1,0100	0,9950	0,9856
	DR _{0,14}	1,5467	0,7399	0,9792	427,6059	1,0595	0,9933	0,9857
	DR _{0,10}	1,4538	0,7136	0,9837	427,8070	1,0254	0,9936	0,9856
	DR _{0,00}	1,2522	0,6493	0,9909	433,1702	1,3190	0,9924	0,9840
<i>Pinus elliotii</i>	DR _{0,80}	5,0929	1,1844	0,7474	988,5479	26,901	0,9265	0,9346
	DR _{0,395}	2,0714	1,0468	0,8808	901,8132	10,572	0,9708	0,9735
	DR _{0,10}	0,9484	0,9226	0,9701	786,5802	2,2200	0,9935	0,9920
	DR _{0,00}	0,7235	0,8775	0,9937	749,5997	0,9175	0,9970	0,9946
	DR _{-0,02}	0,6858	0,8685	0,9977	745,769	0,7912	0,9972	0,9948
	DR _{-0,04}	0,6504	0,8594	1,0015	743,818	0,7145	0,9973	0,9949
	DR _{-0,05}	0,6334	0,8549	1,0034	743,6088	0,6704	0,9977	0,9949
	DR _{-0,10}	0,5563	0,8324	1,0114	750,4068	0,7418	0,9973	0,9945
	DR _{-0,20}	0,4348	0,7886	1,0217	792,9121	1,8783	0,9939	0,9915
<i>Pinus taeda</i>	DR _{0,80}	1,2695	1,6670	0,6359	385,5052	31,385	0,9029	0,9218
	DR _{0,10}	0,4800	1,1686	0,9294	318,4507	7,5086	0,9775	0,9873
	DR _{-0,14}	0,3424	0,9715	0,9709	282,0414	4,4886	0,9871	0,9953
	DR _{-0,15}	0,3394	0,9655	0,9711	281,8809	4,4937	0,9873	0,9953
	DR _{-0,16}	0,3357	0,9580	0,9712	281,8586	4,5206	0,9869	0,9953
	DR _{-0,17}	0,3321	0,9506	0,9713	282,0345	4,5393	0,987	0,9953
	DR _{-0,18}	0,3287	0,9433	0,9712	282,4057	4,5789	0,987	0,9952

Sp.: especie, DR#: índice de densidad de rodal según Curtis, para un cierto valor (#) del parámetro "b", m_1 , m_2 y m_3 : parámetros de la ecuación de volumen agregado, AIC: coeficiente del criterio de Akaike, intercepto y pendiente: parámetros de la relación lineal entre volumen observado y estimado, R²: coeficiente de determinación. Resaltados en negrita los mejores valores de AIC y de los parámetros de la relación lineal.