

Ajuste y validación de modelos de crecimiento en altura dominante e índices de sitio para *Pinus oaxacana* del sur de México

Fit and validation of models for growth of dominant height and site indices for *Pinus oaxacana* in Southern Mexico

Edith Beteta-Montaño ^a, Wenceslao Santiago-García ^{**}, Gerardo Rodríguez-Ortiz ^b,
Mario Ernesto Suárez-Mota ^a, Martín Aquino-Ramírez ^c, Adan Nava-Nava ^d,
Faustino Ruiz-Aquino ^a

*Autor de correspondencia: ^a Universidad de la Sierra Juárez, División de Estudios de Postgrado-Instituto de Estudios Ambientales, Avenida Universidad s/n, Ixtlán de Juárez, CP 68725, Oaxaca, México, wsantiago@unsij.edu.mx

^b Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico del Valle de Oaxaca, División de Estudios de Posgrado e Investigación, Oaxaca, México.

^c Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias, Campo Experimental Edzná, Campeche, Campeche, México.

^d Colegio de Postgraduados, Campus Montecillo, Ciencias Forestales, Montecillo, Texcoco, Estado de México, México.

SUMMARY

Site index models allow for the characterization of forest site productivity and the development of management strategies to achieve objectives of production and conservation of forest resources. The goal of this study was to fit and validate growth models of dominant height and site index for *Pinus oaxacana* Mirov. The database was derived from 4 inventories in 44 permanent plots and 58 temporary plots, established in even-aged stands located in Ixtlán de Juárez, Oaxaca, Mexico. The data were randomly partitioned into subsets of 50 %, 60 %, 70 %, and 80 % for the model adjustments and the remaining data for each subset were used for cross-validation. The models fitted were Korf, Hossfeld IV and Chapman-Richards, in their expressions ADA (algebraic difference approach) and GADA (generalized algebraic difference approach), using the nested iterative method under the non-linear least squares technique. The models that presented the best statistics for fit and validation were: in ADA, anarmorphic Korf b_0 (70 %) and polymorphic Korf b_1 (80 %); in GADA, Chapman-Richards (70 %) and Korf (80 %). The Chapman-Richards GADA model presented the most suitable graphical behavior and was selected to classify the forest site productivity. The dominant height and site index model applied to quantify the productive potential of *P. oaxacana* stands constitutes a valuable tool for the sustainable management of this species in the forests of Oaxaca, Mexico.

Keywords: dynamic equations, permanent and temporary plots, cross-validation.

RESUMEN

Los modelos de índice de sitio permiten caracterizar la productividad del rodal y definir estrategias de manejo para cumplir objetivos de producción y conservación de los recursos forestales. El objetivo de este estudio fue ajustar y validar modelos de crecimiento en altura dominante e índice de sitio para *Pinus oaxacana*. La base de datos se derivó de 4 inventarios en 44 parcelas permanentes de muestreo y 58 parcelas temporales, establecidas en rodales coetáneos de Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México. Los datos fueron particionados aleatoriamente en subconjuntos de 50 %, 60 %, 70 % y 80 % para los ajustes y los datos restantes para cada subconjunto se emplearon en la validación cruzada. Los modelos que presentaron los mejores estadísticos de ajuste y validación fueron: en ADA, Korf anarmórfico b_0 (70 %) y Korf polimórfico b_1 (80 %); en GADA, Chapman-Richards (70 %) y Korf (80 %). El modelo GADA de Chapman-Richards presentó el comportamiento gráfico más adecuado y fue seleccionado para clasificar la productividad del sitio forestal. El modelo de altura dominante e índice de sitio aplicado en la cuantificación del potencial productivo de los rodales de *P. oaxacana*, constituye una herramienta de apoyo para el manejo forestal sustentable de esta especie en los bosques de Oaxaca, México.

Palabras clave: ecuaciones dinámicas, parcelas permanentes y temporales, validación cruzada.

INTRODUCCIÓN

En el manejo forestal sustentable es necesario el conocimiento ágil y preciso de los ecosistemas; el avance tecnológico, la disponibilidad de programas estadísticos y técnicas biométricas potentes, permite obtener información certera e implementar herramientas de apoyo para la toma de decisiones (Santiago-García *et al.* 2020a). La estimación del crecimiento y rendimiento de las masas forestales mediante la modelación matemática, constituye una base científica que proporciona información imprescindible para el manejo forestal sustentable (Salas y Real 2013, Hernández-Cuevas *et al.* 2018).

La estimación del crecimiento de las masas forestales requiere evaluar el potencial de producción del espacio físico, conocido como calidad de sitio, siendo para este procedimiento, el método de índice de sitio el más utilizado, en el que la altura dominante es el indicador de la productividad forestal por excelencia (Clutter *et al.* 1983, Scolforo *et al.* 2013). El índice de sitio se define como la altura dominante que puede alcanzar el rodal a una edad determinada, reflejo de los factores bióticos y abióticos del área forestal (Gadow *et al.* 2012, Özçelik *et al.* 2018, Seppänen y Mäkinen 2020, Socha *et al.* 2021). De acuerdo con Carrero *et al.* (2008) y García *et al.* (2021), este método permite el análisis gráfico mediante el desarrollo de un conjunto de curvas que expresan el crecimiento promedio en altura dominante, proyectadas mediante ecuaciones no lineales, lo que permite calificar la productividad del sitio forestal. Las curvas de índice de sitio poseen ciertas propiedades, entre las que destacan: crecimiento sigmoidal con un punto de inflexión, una asíntota horizontal a edades avanzadas, comportamiento lógico, son invariantes con respecto a la edad de referencia y al camino de simulación (Bailey y Clutter 1974, Cieszewski y Bailey 2000).

En el campo forestal existen diversos estudios del ajuste de modelos de altura dominante e índice de sitio con el fin de aproximar de forma numérica la productividad maderable del área forestal (Vargas-Larreta *et al.* 2013, Scolforo *et al.* 2013, Nava-Nava *et al.* 2020), no obstante, previo a la aplicación de estos, es conveniente comprobar su validez, debido a que un modelo es útil siempre y cuando sea realista, simplifique la realidad y apoye a los intereses del silvicultor (Snee 1977). El proceso de validación de modelos, debe ser objetivo, porque podría suceder que el modelo elegido no sea el adecuado. Por lo anterior, Tedeschi (2006) sugiere tomar en cuenta tres aspectos para validar un modelo, el primero, todos los modelos presentan errores, pero unos describen o calculan mejor que otros, segundo, no aficionarse con un modelo y la exclusión de otros, tercero, analizar y acreditar el ajuste del modelo a los datos, y con esto, generar confianza en el modelo actual o permitir la selección de modelos alternativos.

Snee (1977) establece que existen 4 procedimientos para comprobar la validez de modelos de regresión: a) comprobación de las predicciones del modelo y coeficien-

tes, b) recolección de datos nuevos, para su cotejo con las predicciones del modelo, c) comparación de resultados con modelos teóricos y datos simulados, d) partición de los datos disponibles (validación cruzada), dirigiendo una parte al ajuste y la otra a la validación del modelo. De acuerdo con Arlot y Celisse (2010), la validación tiene como objetivo seleccionar el modelo más apropiado para predecir, con parámetros adecuados y, cuando no es posible, recopilar datos independientes del ajuste. Esta técnica es aplicada por su eficiencia y depende principalmente de la partición de datos porque esto influye en los estadísticos de bondad de ajuste (Zhang y Yang 2015).

En México, Ixtlán de Juárez, Oaxaca, es una comunidad modelo del manejo forestal comunitario, con más de 30 años de experiencia, donde la principal actividad económica es el aprovechamiento maderable de los rodales con diversas especies, principalmente de pino (Santiago-García *et al.* 2022). Por tanto, para la toma de decisiones de manejo forestal, se requiere de herramientas silvícolas cuantitativas que permitan determinar el potencial productivo de sus bosques. Entre los estudios que se han realizado en el área se puede mencionar a Hernández-Cuevas *et al.* (2018), quienes ajustaron modelos de altura dominante e índice de sitio para *Pinus ayacahuite* Ehrenb. ex Schltld., con datos de análisis troncal. Por su parte, Castillo-López *et al.* (2018) desarrollaron ecuaciones dinámicas a nivel regional para *Pinus oaxacana* Mirov, *P. patula* Schiede ex Schltld. & Cham., *P. douglasiana* Martínez y *P. pseudostrobus* Lindl., mediante la misma técnica de análisis, en tanto que, Nava-Nava *et al.* (2020) efectuaron ajustes de ecuaciones dinámicas para *Pinus patula* de Ixtlán de Juárez, con una base principalmente de parcelas permanentes. *Pinus oaxacana* es una de las especies con mayor importancia comercial en los bosques comunales de Ixtlán de Juárez, por tanto, es necesario conocer la productividad maderable de los rodales. El objetivo del estudio fue ajustar y validar modelos de crecimiento en altura dominante e índices de sitio. La hipótesis fue que modelos de polimorfismo asíntótico al presentar mayor flexibilidad, generan curvas que proyectan adecuadamente el crecimiento y productividad de *P. oaxacana*, dada la variabilidad natural de la especie.

MÉTODOS

Área de estudio. El estudio se realizó en el bosque natural bajo manejo de Ixtlán de Juárez (figura 1), Oaxaca, México, localizado entre las coordenadas geográficas 17° 18' 16" - 17° 30' 00" N y 96° 21' 29" - 96° 31' 38" O, en un intervalo de altitudes que varían entre 2.200 y 3.100 m s.n.m. El área que ocupa el bosque de pino-encino presenta un clima templado húmedo con lluvias en verano, siendo este tipo de vegetación el que ocupa el primer lugar en extensión, donde se realiza principalmente aprovechamiento maderable de *Pinus patula*, *P. ayacahuite*, *P. douglasiana*, *P. pseudostrobus*, *P. teocote* Schltld. & Cham., *P. leio-*

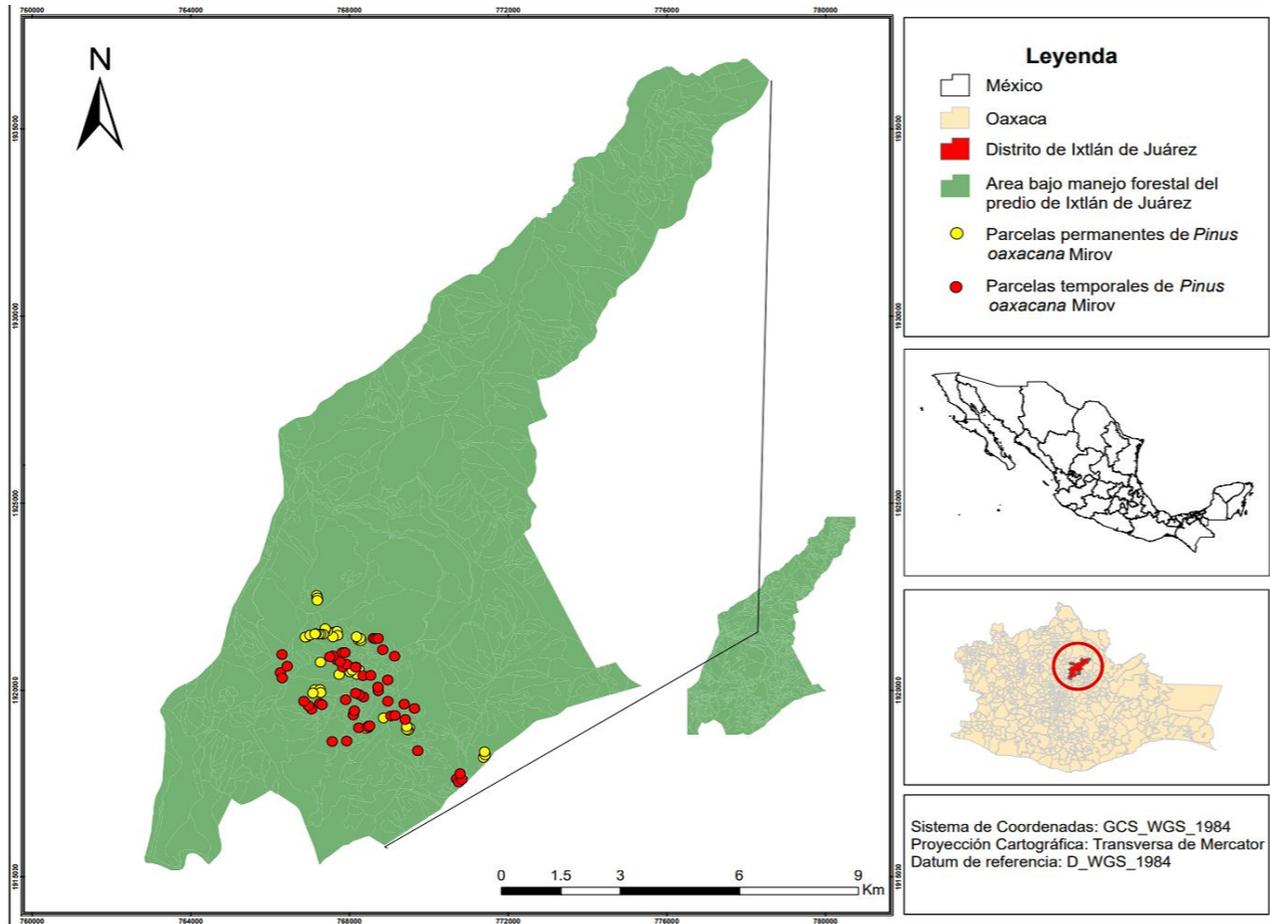


Figura 1. Ubicación geográfica del área de estudio y de las parcelas permanentes y temporales de muestreo.

Geographical location of the study area and of the permanent and temporary sampling plots.

phylla Schiede & Deppe, *P. rudis* Endl., y *P. oaxacana* (Santiago-García *et al.* 2020b).

Datos dasométricos. En el análisis se utilizaron 44 parcelas permanentes de investigación silvícola de 400 m² cada una, con cuatro inventarios anuales (2015-2018), así como de 58 parcelas temporales establecidas en 2005 y proyectadas al año 2006 con un modelo anamórfico de altura dominante para *P. oaxacana* reportado en el programa de manejo forestal (ciclo de corta 2015-2024) de Ixtlán de Juárez, Oaxaca (STF 2015), así, se crearon 58 pares de datos adicionales, de modo que la trayectoria de dichas parcelas hizo posible integrar la información para el ajuste de los modelos dinámicos; lo cual ayudó a enriquecer la base de datos. Lo anterior, se realizó de acuerdo con Bates y Granger (1969), Morris (1974) y Bunn (1989), porque para complementar la base de datos se usaron pronósticos del modelo previo, de modo que se empleó toda la evidencia disponible y fuentes de información sólidas.

Las parcelas están localizadas en rodales puros y coetáneos de *P. oaxacana*. En cada parcela fue medido el diámetro normal (Dn, cm) de todos los individuos y la altura

total (H, m) de al menos 8 árboles por sitio, de los cuales 4 eran dominantes, estos últimos describen exclusivamente a los árboles que tienen éxito en la lucha por la luz y por tal razón, representan el crecimiento máximo en altura de los rodales (Bengoa 1999). Con el fin de captar la mayor parte de las condiciones en las que se desarrolla y domina *P. oaxacana*, las parcelas permanentes y temporales presentaron diferentes densidades y calidades de sitio en las que se encontraba asociado con especies de pinos y latifoliadas, así, se obtuvo una distribución de datos con un intervalo amplio de edades y alturas dominantes (cuadro 1).

Modelos ajustados. Para la modelación del crecimiento en altura dominante de *P. oaxacana* se ajustaron las ecuaciones no lineales de Korf, Hossfeld IV y Chapman-Richards en sus expresiones ADA y GADA (por sus siglas en inglés) (Krumland y Eng 2005, Santiago-García *et al.* 2015, Hernández-Cuevas *et al.* 2018, Castillo-López *et al.* 2018). De acuerdo con Bailey y Clutter (1974) la generación de ecuaciones ADA (cuadro 2) implica plantear el modelo base en las condiciones inicial y futura, de manera que de la condición inicial se despeja el parámetro específico del

Cuadro 1. Resumen estadístico de los datos para el ajuste y validación de ecuaciones de crecimiento en altura dominante e índice de sitio para *P. oaxacana*.

Statistical summary of the data for the fit and validation of equations for growth of dominant height and site index for *P. oaxacana*.

Variables	n	Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo
E		36,6	20,54	5,75	95,6
AD	292	27,04	10,95	3	45,39
Dn		39,21	16,68	6,4	75,20
Na		1.245	1.110	140	4.800

E: edad (años), AD: altura dominante (m), Dn: diámetro normal (cm), Na: Número de árboles por hectárea (Na ha⁻¹), n: número total de observaciones.

Cuadro 2. Estructura de los modelos de altura dominante con formulación en diferencia algebraica (ADA).

Structure of the dominant height models with formulation in algebraic difference approach (ADA).

Modelos de predicción	Modelos de proyección	
Korf $AD_1 = b_0 [exp(-b_1 E_1^{-b_2})]$	Anamórfico (b_0) (KA- b_0)	Polimórfico (b_1) (KA- b_1)
	$AD_2 = AD_1 \left[\frac{exp(-b_1 E_2^{-b_2})}{exp(-b_1 E_1^{-b_2})} \right]$	$AD_2 = b_0 exp \left[\frac{\ln \left(\frac{AD_1}{b_0} \right) E_1^{b_2}}{E_2^{b_2}} \right]$
		Polimórfico (b_2) (KA- b_2)
		$AD_2 = b_0 exp \left[-b_1 E_2 - \frac{\ln(-b_1 \ln(\frac{AD_1}{b_0})^{-1})}{\ln(E_1)} \right]$
Hossfeld IV $AD_1 = \frac{b_0}{1 + exp(b_1)exp(-b_2 \ln(E_1))}$	Anamórfico (b_0) (HA- b_0)	Polimórfico (b_1) (HA- b_1)
	$AD_2 = AD_1 \left[\frac{1 + exp(b_1)exp(-b_2 \ln(E_1))}{1 + exp(b_1)exp(-b_2 \ln(E_2))} \right]$	$AD_2 = \frac{b_0}{1 + exp \left[b_2 \ln(E_1) + \ln \left(\frac{b_0}{AD_1} - 1 \right) \right] exp(-b_2 \ln(E_2))}$
		Polimórfico (b_2) (HA- b_2)
		$AD_2 = \frac{b_0}{1 + exp(b_1)exp \left[\ln \left(\frac{(b_0 AD_1^{-1}) - 1}{exp(b_1)} \right) \ln(E_1)^{-1} \right] \ln(E_2)}$
Chapman-Richards $AD_1 = b_0 [1 - exp(-b_1 E_1)]^{b_2}$	Anamórfico (b_0) (CA- b_0)	Polimórfico (b_1) (CA- b_1)
	$AD_2 = AD_1 \left[\frac{1 - exp(-b_1 E_2)}{1 - exp(-b_1 E_1)} \right]^{b_2}$	$AD_2 = b_0 \left[1 - \left(1 - \left(\frac{AD_1}{b_0} \right)^{\frac{1}{b_2}} \right)^{\frac{E_2}{E_1}} \right]^{b_2}$
		Polimórfico (b_2) (CA- b_2)
		$AD_2 = b_0 [1 - exp(-b_1 E_2)]^{\frac{\ln(AD_1 b_0^{-1})}{\ln(1 - exp(-b_1 E_1))}}$

AD₁: es la altura dominante (m) en la condición inicial (E₁, años), AD₂: altura dominante (m) correspondiente a una condición futura (E₂, años), ln: logaritmo natural, exp: función exponencial y b_i: parámetros a estimar.

sitio y se sustituye la solución en la condición futura. Santiago-García *et al.* (2015), establecen que las ecuaciones tipo ADA se constituyen por una ecuación de predicción y una ecuación de proyección, y que estas últimas permiten calificar la calidad de sitio en los rodales, a partir de una edad base, altura dominante y la edad del rodal. Por su parte, la derivación de ecuaciones GADA (cuadro 3) implica seleccionar una ecuación base en la que se identifican los parámetros dependientes de la calidad de sitio. Los parámetros seleccionados se expresan como funciones de la calidad de sitio definida por la variable X_0 , la ecuación base bidimensional se expande a una ecuación explícita tridimensional, de donde la variable X_0 se despeja a partir de condiciones iniciales en edad y altura, lo que permite obtener ecuaciones dinámicas que proveen curvas polimórficas con múltiples asíntotas (Cieszewski 2002, Krumland y Eng 2005, Quiñonez-Barraza *et al.* 2015).

Ajuste y validación cruzada. En el ajuste y validación de las ecuaciones dinámicas ADA y GADA, se realizó la aleatorización de las parcelas con el paquete “caTools” de R-Project® (R Core Team 2017), la base de datos fue particionada en 4 conjuntos con proporciones del 50 %, 60 %, 70 % y 80 %. Estos conjuntos se utilizaron para el ajuste de las ecuaciones dinámicas mediante el método iterativo anidado (nested iterative procedure) (Vargas-Larreta *et al.* 2010, Castillo-López *et al.* 2018, Nava-Nava *et al.* 2020) bajo la técnica de mínimos cuadrados no lineales (NLS). Mientras que las proporciones de datos restantes del 50 %, 40 %, 30 % y 20 % fueron empleadas para evaluar estadísticamente la capacidad predictiva de las ecuaciones ajustadas. Los ajustes se implementaron con el procedimiento MODEL del paquete estadístico SAS/ETS ® 9.4 (SAS Institute Inc. 2017).

Indicadores estadísticos. Para evaluar la bondad de ajuste de las ecuaciones se emplearon los estadísticos siguientes (cuadro 4): suma de cuadrados del error (SCE) [1], la cual representa la variación que no se puede explicar por la ecuación; el cuadrado medio del error (CME) [2], que refleja la varianza del modelo; la raíz del cuadrado medio del error (RCME) [3], que estima el error promedio en términos de la variable dependiente; el coeficiente de determinación ajustado (R^2_{adj}) [4], que expresa el porcentaje de la variabilidad total explicada por el modelo, tomando en cuenta el número de parámetros (Hernández-Cuevas *et al.* 2018, Santiago-García *et al.* 2020b). En la validación de los modelos de altura dominante se utilizó SCE [1], el error medio cuadrático EMC [5] que analiza la precisión de las estimaciones del modelo, el \bar{E} , el cual estima el error promedio absoluto y finalmente, el IE que expresa en términos relativos la eficacia del modelo para estimar determinada variable (Vanclay 1994). La homogeneidad de varianzas en la distribución de los residuales se corroboró mediante la prueba de White (White 1980), en tanto que, la autocorrelación de los residuales se evaluó a través del

Cuadro 3. Estructura de los modelos de altura dominante con formulación en diferencia algebraica generalizada (GADA).

Structure of the dominant height models with formulation in generalized algebraic difference approach (GADA).

Modelo	Parámetro relacionado con el sitio	Solución para X_0 con valores iniciales (AD_1, E_1)	Ecuación dinámica
Korf (KG)	$a_0 = \exp(X_0)$ $a_1 = b_0 + \frac{b_1}{X_0}$	$X_0 = \frac{1}{2} E_1^{-b_2} \left\{ b_0 + E_1^{b_2} \ln(AD_1) + \sqrt{4b_1 E_1^{b_2} + [-b_0 - E_1^{b_2} \ln(AD_1)]^2} \right\}$	$AD_2 = \exp(X_0) \exp \left[- \left(b_0 + \frac{b_1}{X_0} \right) E_2^{-b_2} \right]$
Hossfeld IV (HG)	$a_0 = b_0 + X_0$ $a_1 = \frac{b_1}{X_0}$	$X_0 = \frac{1}{2} \left[AD_1 - b_0 + \sqrt{(AD_1 - b_0)^2 + 4b_1 AD_1 E_1^{-b_2}} \right]$	$AD_2 = \frac{b_0 + X_0}{1 + \frac{b_1}{X_0} E_2^{-b_2}}$
Chapman-Richards (CG)	$a_0 = \exp(X_0)$ $a_2 = b_1 + \frac{b_2}{X_0}$	$X_0 = \frac{1}{2} \left[\ln(AD_1) - b_1 L + \sqrt{[b_1 L - \ln(AD_1)]^2 - 4b_2 L} \right]$	$AD_2 = AD_1 \left[\frac{1 - \exp(-b_0 E_2)}{1 - \exp(-b_0 E_1)} \right]^{b_1 + b_2 / X_0}$

Donde
 $L = \ln[1 - \exp(-b_0 E_1)]$

AD_1 : altura dominante (m) en la condición inicial (E_1 , años), AD_2 : altura dominante (m) correspondiente a la condición futura (E_2 , años), \ln : logaritmo natural, \exp : función exponencial, a_i : parámetros en la ecuación base y b_i : parámetros a estimar.

estadístico de Durbin-Watson (Castillo-López *et al.* 2018, Nava-Nava *et al.* 2020), además, estos análisis se complementaron con gráficos de distribución de los residuales.

La comparación de los estadísticos de bondad de ajuste, el comportamiento gráfico y principalmente los valores de SCE, EMC, \bar{E} e IE obtenidos en la validación de las ecuaciones ensayadas con las diferentes proporciones de datos, ayudaron a seleccionar los modelos que mejor predicen el crecimiento en altura dominante. Conjuntamente con el análisis numérico fue necesario analizar el comportamiento gráfico de cada modelo, debido que en algunas ocasiones se sobreestima a edades tempranas y en otras se subestima a edades avanzadas o viceversa (Diéguez-Aranda *et al.* 2006).

RESULTADOS

Ajuste de ecuaciones ADA. Mediante el uso de los cuatro conjuntos de datos con diferentes proporciones (50 %, 60 %, 70 % y 80 %) se obtuvieron ajustes satisfactorios, debido a que arrojaron valores altos en R^2 adj, al explicar más del 99,9 % de la varianza total observada en altura dominante, además de que el estadístico de Durbin-Watson osciló entre 1,87 - 2,16 (figura 2), lo que indica que

no existe autocorrelación en la distribución de los residuales de los modelos, cumpliendo así con el supuesto de independencia. De acuerdo con la prueba de White, la hipótesis nula no es rechazada ($P > 0,05$) por lo que en todos los casos se cumple con el supuesto de homogeneidad de varianzas. Respecto a la estimación de los parámetros, estos fueron significativos ($P < 0,05$) y con valores bajos en el error estándar, con excepción del parámetro b_0 de los modelos KA- b_1 -50, KA- b_1 -80, KA- b_2 -70 y KA- b_2 -80 los cuales obtuvieron errores estándar mayores a 2 (cuadro 5).

Ajuste de ecuaciones GADA. Las ecuaciones GADA presentaron ajustes adecuados debido a que se obtuvieron valores altos en R^2 adj, al explicar más del 99,8 % de la varianza total observada en la altura dominante y resultados cercanos a 2 en el estadístico de Durbin-Watson (figura 3). Asimismo, de acuerdo con la prueba de White ($P > 0,05$) todos los modelos presentaron homogeneidad de varianzas en la distribución de los residuales. Respecto a los estimadores de los parámetros, estos fueron significativos ($P < 0,05$) y con errores estándar bajos (con excepción de los parámetros b_1 de las ecuaciones HG-50 y HG-70, con errores altos) (cuadro 6).

Cuadro 4. Indicadores estadísticos para evaluar la bondad de ajuste y la validación de los modelos de crecimiento en altura dominante.
 Statistical indicators to evaluate goodness of fit and the validation of models of growth in dominant height.

Indicador	Expresión	Ecuación
Suma de cuadrados del error (SCE)	$SCE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	[1]
Cuadrado medio del error (CME)	$CME = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p}$	[2]
Raíz del cuadrado medio del error (RCME)	$RCME = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - p}}$	[3]
Coefficiente de determinación ajustado (R^2 adj)	$R^2 adj = 1 - (1 - R^2) \left(\frac{n - 1}{n - p} \right)$	[4]
Error medio cuadrático (EMC)	$EMC = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}$	[5]
Sesgo promedio absoluto (\bar{E})	$\bar{E} = \left \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \hat{y}_i}{n} \right $	[6]
Índice de eficiencia (IE)	$IE = 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right)$	[7]

\hat{y}_i : son los valores predichos, y_i : son los valores observados, \bar{y} : media de los valores observados, p : número de parámetros del modelo y n : número de observaciones.

Validación de ecuaciones ADA y GADA. La bondad de ajuste y el comportamiento gráfico de las ecuaciones ensayadas fueron aspectos importantes al seleccionar el modelo mejor para estimar la altura dominante y el índice de sitio. Sin embargo, fue indispensable conocer el error de predicción, por lo cual se realizó la validación de cada modelo ajustado, mediante la comparación estadística de las alturas estimadas por los modelos ajustados ADA y GADA y las alturas observadas en campo (bases de datos con proporciones del 50 %, 40 %, 30 % y 20 %). En las figuras 4 y 5 se muestran los estadísticos de la validación (SCE, EMC, \bar{E} e IE), los cuales permitieron evaluar la capacidad predictiva de los modelos ensayados.

Curvas de índice de sitio. Para la construcción de las curvas de crecimiento en altura dominante, se calculó la curva promedio de cada modelo, y las alturas dominantes (AD_2) al emplear los parámetros estimados de cada modelo ajustado,

la edad de proyección (E_2), la edad de referencia de 40 años (E_1) y el valor del índice de sitio (AD_1), posteriormente se trazaron tres curvas equidistantes por arriba y debajo de la curva promedio. En la figura 6 se presentan las curvas de índice de sitio generadas con los modelos mejores de cada metodología.

Graficas de residuales. Los valores de los residuales de los modelos seleccionados se encontraron en un intervalo de -0,9 a 1,8, además presentaron un patrón aleatorio por abajo y arriba del valor cero de referencia y no existió una tendencia definida, lo que corrobora la homogeneidad de varianzas de los errores (figura 7).

En el análisis de los residuales, para detectar problemas de autocorrelación, además del estadístico de Durbin-Watson, se graficaron los residuales frente a los residuales retardados, una (Lag1), dos (Lag2) y tres (Lag3) observaciones anteriores (figura 8). De esta manera se corroboró

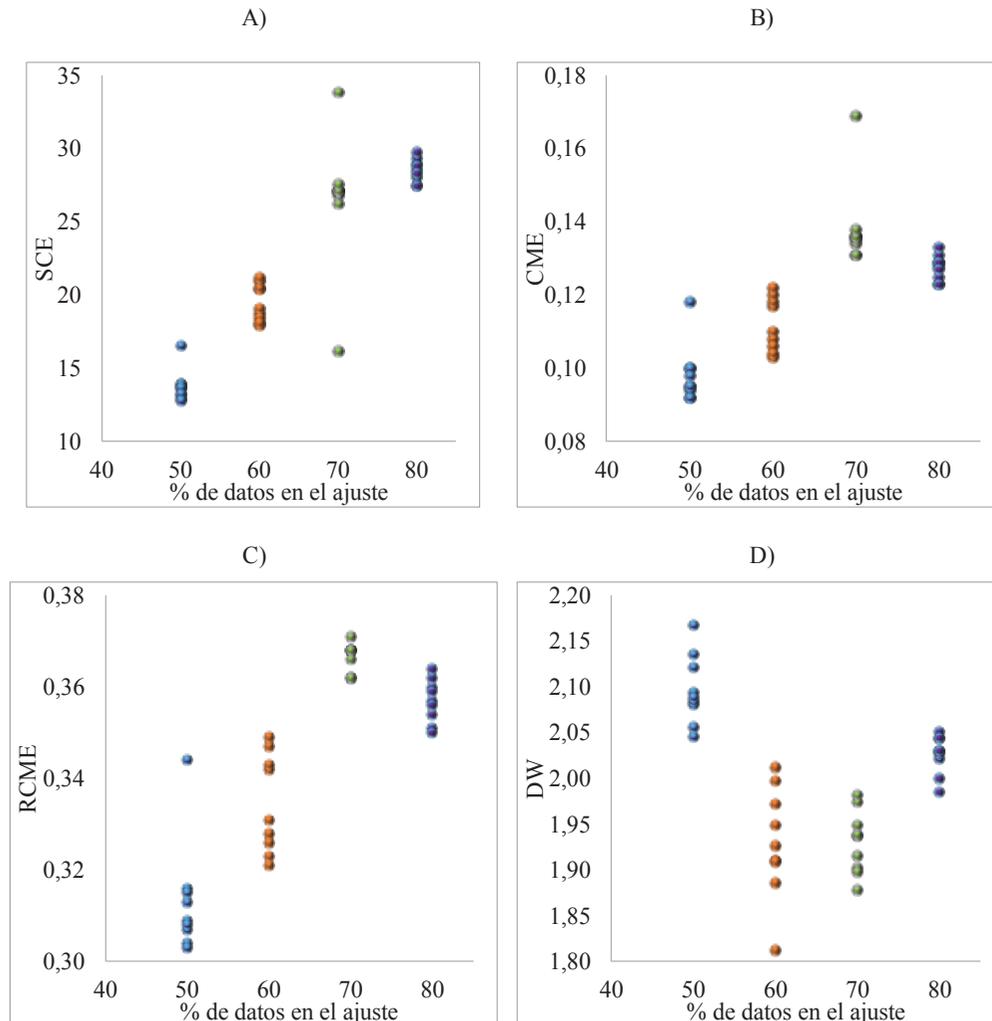


Figura 2. Estadísticos de bondad de ajuste de ecuaciones con formulación en diferencia algebraica (ADA): SCE: suma de cuadrado del error (A), CME: cuadrado medio del error (B), RCME: Raíz del cuadrado medio del error (C), DW: estadístico de Durbin-Watson (D).

Statistics of goodness of fit for equations with formulation in algebraic difference approach (ADA).

Cuadro 5. Parámetros estimados de las ecuaciones con formulación en diferencia algebraica (ADA).

Estimated parameters of the equations with formulation in algebraic difference (ADA).

% de datos	Código de ecuación	b_i	Estimación	Error estándar	$P > t $	% de datos	Código de ecuación	b_i	Estimación	Error estándar	$P > t $
		b_0	-	-	-			b_0	-	-	-
	KA- b_0 -50	b_1	7,3743	0,0586	<0,001		KA- b_0 -70	b_1	8,5079	0,1088	<0,001
		b_2	0,4179	0,0069	<0,001			b_2	0,5517	0,0080	<0,001
		b_0	96,2120	2,1399	<0,001			b_0	90,7822	1,9206	<0,001
	KA- b_1 -50	b_1	-	-	-		KA- b_1 -70	b_1	-	-	-
		b_2	0,5394	0,0091	<0,001			b_2	0,5986	0,0101	<0,001
		b_0	91,7010	1,9302	<0,001			b_0	99,4247	2,4085	<0,001
	KA- b_2 -50	b_1	8,3710	0,1263	<0,001		KA- b_2 -70	b_1	8,5826	0,1340	<0,001
		b_2	-	-	-			b_2	-	-	-
		b_0	-	-	-			b_0	-	-	-
50	HA- b_0 -50	b_1	5,1034	0,0231	<0,001	70	HA- b_0 -70	b_1	5,1843	0,0221	<0,001
		b_2	1,5346	0,0095	<0,001			b_2	1,5351	0,0095	<0,001
		b_0	55,2342	0,4025	<0,001			b_0	54,4788	0,3985	<0,001
	HA- b_1 -50	b_1	-	-	-		HA- b_1 -70	b_1	-	-	-
		b_2	1,4350	0,0104	<0,001			b_2	1,5089	0,0114	<0,001
		b_0	54,0070	0,3728	<0,001			b_0	55,6503	0,4295	<0,001
	HA- b_2 -50	b_1	4,9771	0,0240	<0,001		HA- b_2 -70	b_1	5,0518	0,0247	<0,001
		b_2	-	-	-			b_2	-	-	-
		b_0	-	-	-			b_0	-	-	-
	CA- b_0 -50	b_1	0,0353	0,0004	<0,001		CA- b_0 -70	b_1	0,0424	0,0004	<0,001
		b_2	1,3664	0,0104	<0,001			b_2	1,5727	0,0127	<0,001
		b_0	48,5167	0,2419	<0,001			b_0	48,8635	0,2564	<0,001
	CA- b_1 -50	b_1	-	-	-		CA- b_1 -70	b_1	-	-	-
		b_2	1,3662	0,0119	<0,001			b_2	1,4678	0,0138	<0,001
		b_0	47,3246	0,2582	<0,001			b_0	50,8004	0,3709	<0,001
	CA- b_2 -50	b_1	0,0301	0,0004	<0,001		CA- b_2 -70	b_1	0,0262	0,0005	<0,001
		b_2	-	-	-			b_2	-	-	-

Continúa

Continuación Cuadro 5

	b_0	-	-	-		b_0	-	-	-
KA- b_0 -60	b_1	10,0192	0,1766	<0,001	KA- b_0 -80	b_1	7,6117	0,0737	<0,001
	b_2	0,7151	0,0085	<0,001		b_2	0,4824	0,0070	<0,001
	b_0	82,6014	1,4297	<0,001		b_0	109,7098	2,5055	<0,001
KA- b_1 -60	b_1	-	-	-	KA- b_1 -80	b_1	-	-	-
	b_2	0,6199	0,094	<0,001		b_2	0,5169	0,0082	<0,001
	b_0	76,3642	1,1636	<0,001		b_0	117,4994	2,9826	<0,001
KA- b_2 -60	b_1	9,4326	0,1617	<0,001	KA- b_2 -80	b_1	7,7235	0,0843	<0,001
	b_2	-	-	-		b_2	-	-	-
	b_0	-	-	-		b_0	-	-	-
HA- b_0 -60	b_1	4,9910	0,0240	<0,001	HA- b_0 -80	b_1	4,8983	0,0178	<0,001
	b_2	1,5301	0,0095	<0,001		b_2	1,3988	0,0081	<0,001
	b_0	54,2760	0,3868	<0,001		b_0	60,1396	0,4772	<0,001
HA- b_1 -60	b_1	-	-	-	HA- b_1 -80	b_1	-	-	-
	b_2	1,4472	0,0108	<0,001		b_2	1,3784	0,0093	<0,001
	b_0	53,4456	0,3662	<0,001		b_0	60,9903	0,5080	<0,001
HA- b_2 -60	b_1	4,8870	0,0241	<0,001	HA- b_2 -80	b_1	4,8192	0,0187	<0,001
	b_2	-	-	-		b_2	-	-	-
	b_0	-	-	-		b_0	-	-	-
CA- b_0 -60	b_1	0,0455	0,0004	<0,001	CA- b_0 -80	b_1	0,0363	0,0004	<0,001
	b_2	1,5263	0,0127	<0,001		b_2	1,3959	0,0098	<0,001
	b_0	46,5499	0,2156	<0,001		b_0	50,9321	0,2757	<0,001
CA- b_1 -60	b_1	-	-	-	CA- b_1 -80	b_1	-	-	-
	b_2	1,4108	0,0132	<0,001		b_2	1,3329	0,0108	<0,001
	b_0	47,1352	0,2686	<0,001		b_0	49,5288	0,2385	<0,001
CA- b_2 -60	b_1	0,0289	0,0004	<0,001	CA- b_2 -80	b_1	0,0341	0,0004	<0,001
	b_2	-	-	-		b_2	-	-	-

60

80

que los residuales se distribuyen de forma independiente. Los gráficos correspondientes al primer retardo (figura 8A1, 8B1, 8C1 y 8D1) en todos los modelos, parecen representar mejor el patrón aleatorio de los residuales alrededor de las líneas cero de referencia, en tanto que, con 2 y 3 retardos exhiben una tendencia ligera, pero sin problemas de autocorrelación.

DISCUSIÓN

En esta investigación, al usar de forma pragmática la combinación tanto de dos fuentes de información (parcelas permanentes y temporales), como de los pronósticos generados con el modelo previo, y el método de ajuste iterativo, resultó en una herramienta potente para la optimización de la capacidad predictiva de los modelos de altura dominante.

Bates y Granger (1969), Morris (1974) y Bunn (1989), sugieren que el uso de pronósticos de modelos previos como variables independientes, equivale a utilizar toda la evidencia disponible y fuentes de información sólidas, para mejorar los pronósticos de los modelos nuevos. Asimismo, en la presente investigación se aplicó la suposición fundamental de que no se puede identificar exactamente el verdadero proceso, pero diferentes modelos pueden desempeñar un papel complementario en la generación de datos (Terui y Van Dijk 2002), como en el caso de la altura dominante de los rodales. La estrategia fue similar a la implementada por Nava-Nava *et al.* (2022), quienes señalan que la altura de los árboles no se puede conocer con certeza, incluso con mediciones de campo convencionales, por lo que la estimación con modelos permite una fuente de datos adecuada. Por tanto, los resultados obtenidos en la presente investigación corroboran la ro-

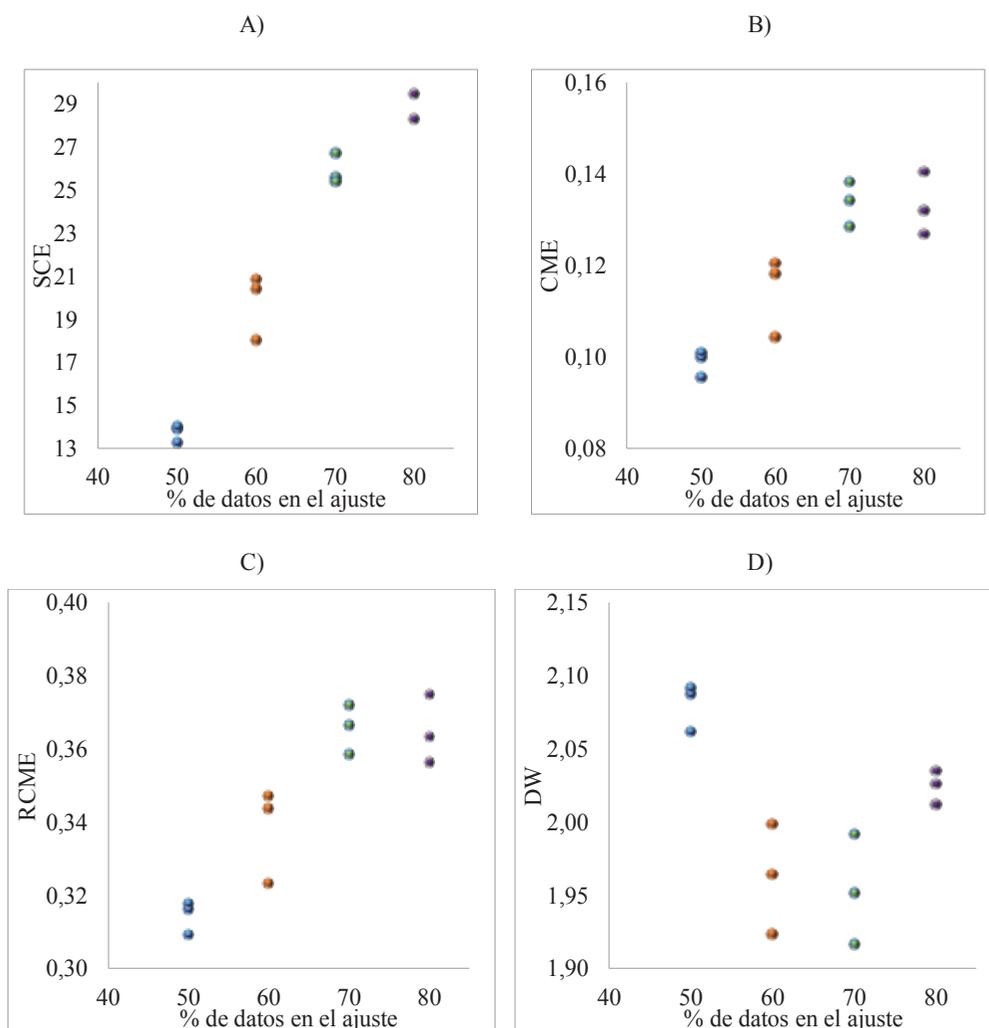


Figura 3. Estadísticos de bondad de ajuste de ecuaciones con formulación en diferencia algebraica generalizada (GADA): SCE: suma de cuadrado del error (A), CME: cuadrado medio del error (B), RCME: Raíz del cuadrado medio del error (C), DW: estadístico de Durbin-Watson (D).

Statistics of goodness of fit for equations with formulation in generalized algebraic difference approach (GADA).

bustez derivada de la combinación empírica de las fuentes de información.

Los estadísticos de bondad de ajuste obtenidos, coinciden con los generados en otros estudios para especies de coníferas (González-Méndez *et al.* 2016, Socha y Tymińska-Czabańska 2019, Nava-Nava *et al.* 2020, Guzmán-Santiago *et al.* 2021). Los coeficientes de determinación (R^2 adj) de los modelos ADA y GADA (figuras 2 y 3) muestran que es posible explicar más del 99 % de la variabilidad en altura dominante para *Pinus oaxacana*, valor similar al obtenido por Castillo-López *et al.* (2018) para la especie en Oaxaca, México.

En general todos los modelos del presente estudio mostraron estadísticos de ajuste satisfactorios y parámetros significativos, sin embargo, el modelo de Hossfeld GADA fue descartado para su elección debido a que presentaba errores estándar altos de hasta 3.822,0 en alguno de sus parámetros (cuadro 6). Este error alto también ha sido reportado por Castillo-López *et al.* (2013), Galindo-Soto *et al.* (2017) y Nava-Nava *et al.* (2020).

Los modelos seleccionados (figura 6) presentaron valores similares para los estadísticos SCE, EMC y \bar{E} en la validación (figura 4 y 5). Para los modelos ADA se obtu-

vieron intervalos de 5,4 – 22,5, 0,1 – 0,2 y 0,001 – 0,2, mientras que en GADA fueron de 5,5 – 21,9, 0,1 – 0,2 y 0,03 – 0,1, para cada indicador respectivamente. Sin embargo, los modelos pueden presentar los mismos estadísticos, pero proyecciones gráficas diferentes (Vargas-Larreta *et al.* 2010). Finalmente, mediante el análisis gráfico se seleccionaron los modelos GADA, porque las curvas presentaron una flexibilidad mayor (figura 6C y 6D). La flexibilidad de estas curvas se debe a que más de un parámetro depende de la calidad de estación, son polimórficas y con múltiples asíntotas (Cieszewski 2002) y se adaptan fácilmente a la modificación de la edad de referencia (Cieszewski y Bailey 2000).

El modelo GADA de Korf por su parte, ha sido ensayado por Vargas-Larreta *et al.* (2013) y Castillo-López *et al.* (2018) para modelar el crecimiento en altura dominante de diferentes especies de pinos en México. Asimismo, en otras partes del mundo también se ha utilizado, por ejemplo, Martín-Benito *et al.* (2007), estudiaron la variabilidad interregional de los modelos de crecimiento en altura dominante e índice de sitio de *Pinus nigra* Arn. en la Península Ibérica, seleccionando el modelo de Korf, al obtener resultados mejores, tanto en el ajuste como en la validación.

Cuadro 6. Parámetros estimados de las ecuaciones con formulación en diferencia algebraica generalizada (GADA).

Estimated parameters of the equations with formulation in algebraic difference approach (GADA).

% de datos	Código de ecuación	b_i	Estimación	Error estándar	$P > t $	% de datos	Código de ecuación	b_i	Estimación	Error estándar	$P > t $		
50	KG-50	b_0	-9,3479	2,1956	<0,001	70	KG-70	b_0	-13,2453	2,7445	<0,001		
		b_1	79,91302	9,8427	<0,001			b_1	100,6745	12,461	<0,001		
		b_2	0,5945	0,0091	<0,001			b_2	0,5982	0,0099	<0,001		
	HG-50	b_0	-58,7714	16,7723	<0,001		HG-70	b_0	32,9200	1,6418	<0,001		
		b_1	19887,89	2793,6	<0,001			b_1	4656,675	313,7	<0,001		
		b_2	1,5324	0,0108	<0,001			b_2	1,5115	0,0117	<0,001		
	CG-50	b_0	0,0468	0,0004	<0,001		CG-70	b_0	0,035056	0,0004	<0,001		
		b_1	-0,9556	0,2305	<0,001			b_1	-1,27711	0,2448	<0,001		
		b_2	9,7870	0,8907	<0,001			b_2	10,30951	0,9701	<0,001		
	60	KG-60	b_0	-12,6646	2,8053		<0,001	80	KG-80	b_0	-13,3171	2,5149	<0,001
			b_1	96,9470	11,6174		<0,001			b_1	99,7758	11,7306	<0,001
			b_2	0,7644	0,0081		<0,001			b_2	0,5134	0,0079	<0,001
HG-60		b_0	-101,414	33,2807	0,0027	HG-80	b_0		-79,8104	22,2523	<0,001		
		b_1	23236,24	3822,0	<0,001		b_1		19583,34	3248,8	<0,001		
		b_2	1,5674	0,0098	<0,001		b_2		1,5037	0,0087	<0,001		
CG-60		b_0	0,0253	0,0004	<0,001	CG-80	b_0		0,03740	0,0003	<0,001		
		b_1	-1,6951	0,2188	<0,001		b_1		-0,8445	0,196	<0,001		
		b_2	11,3136	0,8773	<0,001		b_2		8,7767	0,7718	<0,001		

El modelo GADA de Chapman-Richards ha sido ampliamente utilizado para modelar el crecimiento en altura dominante, por ejemplo, Diéguez-Aranda *et al.* (2006) construyeron curvas de índice de sitio para *Pinus taeda* L. en plantaciones de Estados Unidos; Vargas-Larreta *et al.* (2010) ajustaron modelos dinámicos de índice de sitio para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México; Tamarit-Urias *et al.* (2014) ajustaron tres modelos para *Tectona grandis* L., en el valle de Edzná, Campeche, México, incluyendo el modelo de Chapman-Richards; por su parte, Quiñonez-Barraza *et al.* (2015), a partir de este modelo, ajustaron ecuaciones de índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. En tanto que, Hernández-Cuevas *et al.* (2018), ajustaron modelos de ín-

dice de sitio para la clasificación de la productividad de rodales de *P. ayacahuite*, empleando entre otros, al modelo de Chapman-Richards. Más recientemente, Nava-Nava *et al.* (2020) proponen dicho modelo en su formulación GADA para la evaluación de la productividad forestal de *P. patula*, en la región de estudio.

Los modelos mejores fueron Korfy y Chapman-Richards en su formulación GADA ajustados con las proporciones del 80 % y 70 % de la base de datos, respectivamente, los cuales presentaron un valor para RCME de 0,3665 m y 0,3720 m, respectivamente, con valores altos en el coeficiente de determinación ajustado (R^2 adj) (figura 3). Otro aspecto crucial en la selección de los modelos mejores fue el comportamiento gráfico, los modelos elegidos

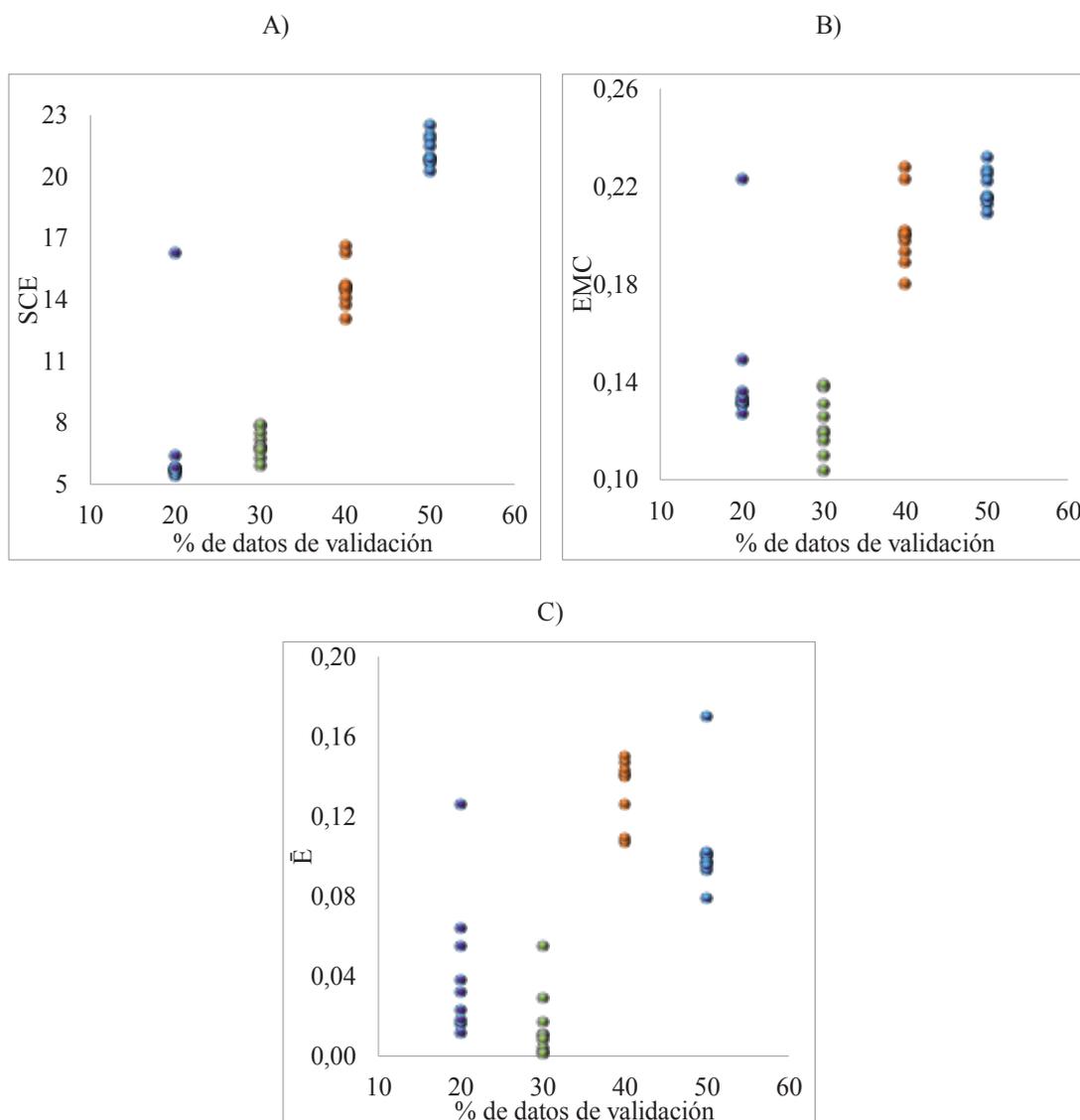


Figura 4. Indicadores estadísticos de la validación de ecuaciones con formulación en diferencia algebraica (ADA): SCE: suma de cuadrados del error (A), EMC: error medio cuadrático (B), \bar{E} : sesgo promedio absoluto (C).

Statistical indicators for the validation of equations with formulation in algebraic difference approach (ADA).

agruparon adecuadamente el intervalo de dispersión de los datos observados (figura 6), con asíntotas que oscilan entre los 30 y 40 m, resultados similares fueron obtenidos por Nava-Nava *et al.* (2020) para *P. patula* en el área de estudio y por Castillo López *et al.* (2018) para la especie en la región.

De acuerdo con Cieszewski (2002) y Vargas-Larreta *et al.* (2010), las ecuaciones GADA generan curvas polimórficas y a la vez anamórficas, así como invariantes respecto a la edad referencia y con respecto al camino de simulación, presentan gran flexibilidad y a partir de un modelo base se pueden derivar otros, permitiendo que más de un parámetro dependa de la calidad de estación. Por estas ventajas, además del comportamiento gráfico, y los

estadísticos de ajuste y sobre todo de validación, se optó por seleccionar la ecuación GADA de Chapman-Richards ajustada con el 70 % de los datos (CG-70).

La ecuación de Chapman-Richards representa de forma adecuada los patrones de crecimiento en altura dominante y esta eficiencia se debe a la flexibilidad del modelo y a la representación adecuada de las trayectorias de las curvas sobre los datos observados (Vargas-Larreta *et al.* 2010, Nava-Nava *et al.* 2020). En la modelación de la altura dominante para *P. oaxacana* y *P. patula*, Castillo-López *et al.* (2018) y Nava-Nava *et al.* (2020), respectivamente, seleccionaron la ecuación de Chapman-Richards.

En la región de la Sierra Norte de Oaxaca, México, existen modelos de índice de sitio para *P. oaxacana*,

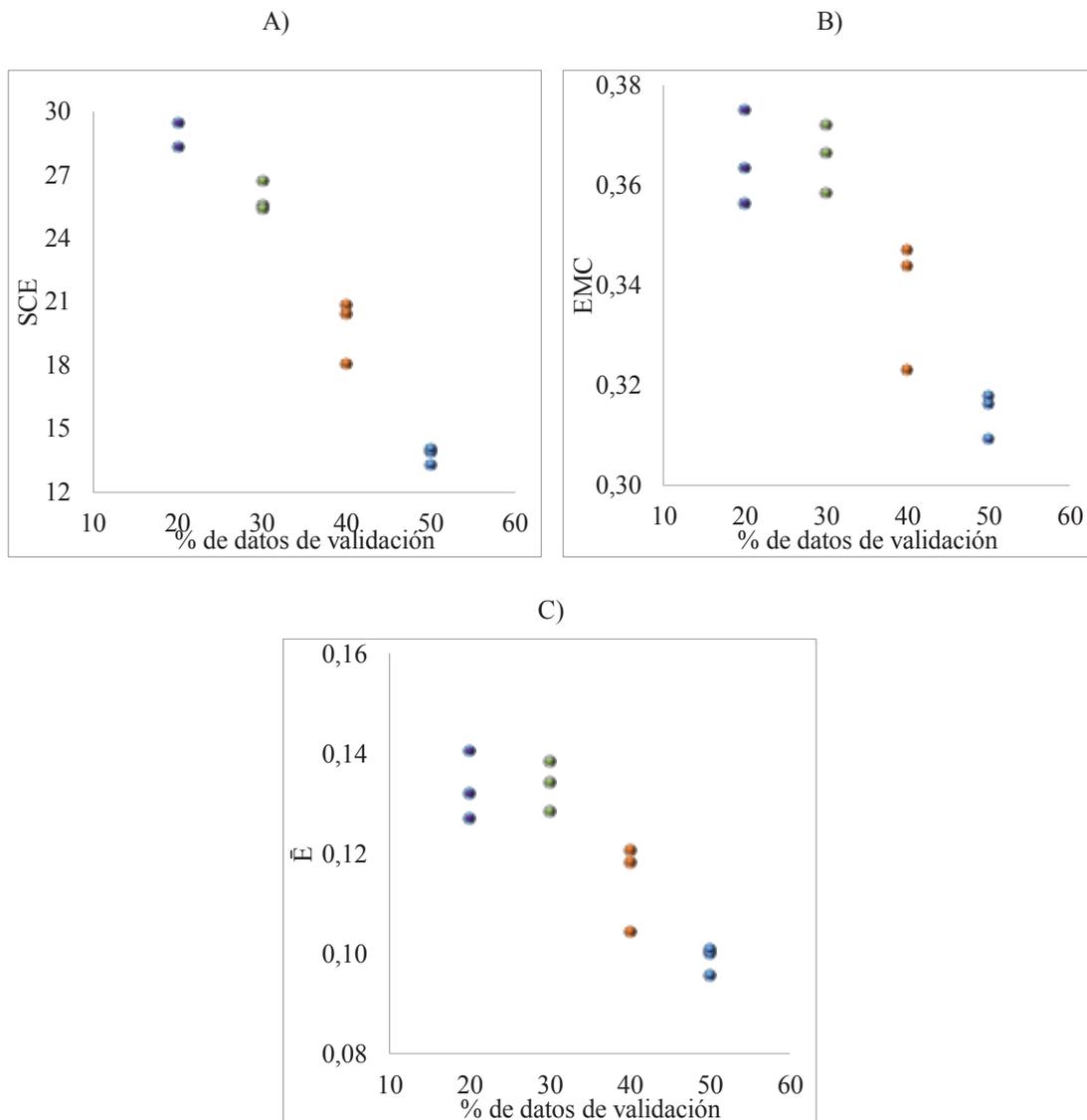


Figura 5. Indicadores estadísticos de la validación de ecuaciones con formulación en diferencia algebraica generalizada (GADA): SCE: suma de cuadrados del error (A), EMC: error medio cuadrático (B), \bar{E} : sesgo promedio absoluto (C).

Statistics of goodness of fit for equations with formulation in generalized algebraic difference approach (GADA).

como el ajustado por Castillo-López *et al.* (2018), quienes utilizaron información proveniente de análisis troncales, pero a una escala gruesa de análisis, o el modelo anamórfico para *P. oaxacana* reportado en el programa de manejo de Ixtlán de Juárez, Oaxaca (STF, 2015) y construido con datos de corte transversal, sin embargo,

se sabe que este tipo de modelos (anamórficos) tiene ciertas limitaciones en cuanto a las estimaciones, dado que establecen el mismo turno forestal en los rodales, independientemente de su productividad, por lo que no se puede optimizar el potencial real del sitio (Clutter *et al.* 1983). Por tanto, una ecuación a nivel predial y con

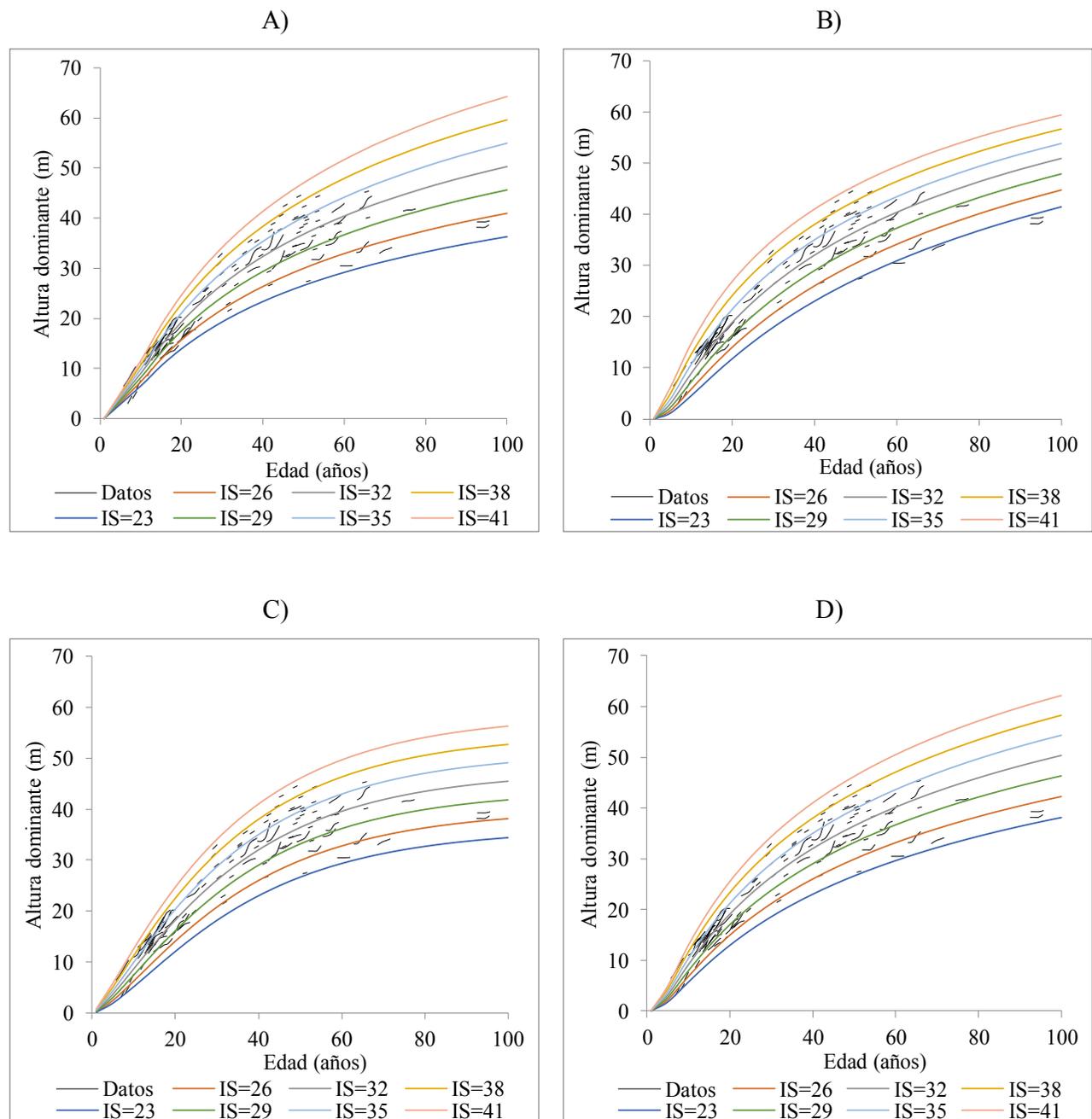


Figura 6. Curvas de índice de sitio para *P. oaxacana* a la edad base de 40 años. Ecuaciones con formulación en diferencia algebraica (ADA): A) Korf anamórfico b_0 (70 %) y B) Korf polimórfico b_1 (80 %); ecuaciones con formulación en diferencia algebraica generalizada (GADA): C) Chapman-Richards (70 %) y D) Korf (80 %).

Site index curves for *Pinus oaxacana* at 40 years of age. Equations with formulation in algebraic difference approach (ADA): A) anamorphic Korf b_0 (70 %) and B) polymorphic Korf b_1 (80 %); Equations with formulation in generalized algebraic difference approach (GADA): C) Chapman-Richards (70 %) and D) Korf (80 %).

datos de tipo longitudinal puede abarcar condiciones de sitio más específicas y apegarse con mayor fidelidad a la dinámica de las masas forestales, de modo que pueda combinarse con herramientas para el manejo de la densidad y modelos de crecimiento y rendimiento, lo que permitirá aplicar el régimen de manejo más apropiado para optimizar la productividad forestal (Santiago-García *et al.* 2013). Tratándose de una comunidad modelo a nivel mundial, en el manejo sustentable de los recursos forestales, como es el caso de la comunidad de Ixtlán de Juárez, Oaxaca, contar con herramientas propias para la toma de decisiones es una necesidad apremiante (Bray *et al.* 2005, Klooster *et al.* 2005, Torres-Rojo *et al.* 2016, Santiago-García *et al.* 2022).

CONCLUSIONES

El análisis gráfico, los estadísticos de bondad de ajuste y principalmente la validación de los modelos permitió seleccionar las ecuaciones en diferencia algebraica (ADA): Korf anamórfico b_0 (70 %) y Korf polimórfico b_1 (80 %) y las ecuaciones en diferencia algebraica generalizada (GADA): Chapman-Richards (70 %) y Korf (80 %). De estos, el modelo GADA de Chapman-Richards presentó capacidad predictiva mayor y fue elegido como el mejor para la estimación de la altura dominante y la evaluación del potencial productivo de los rodales de *P. oaxacana*, en bosques de Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México, constituyendo así una herramienta importante para la toma de decisiones de manejo forestal.

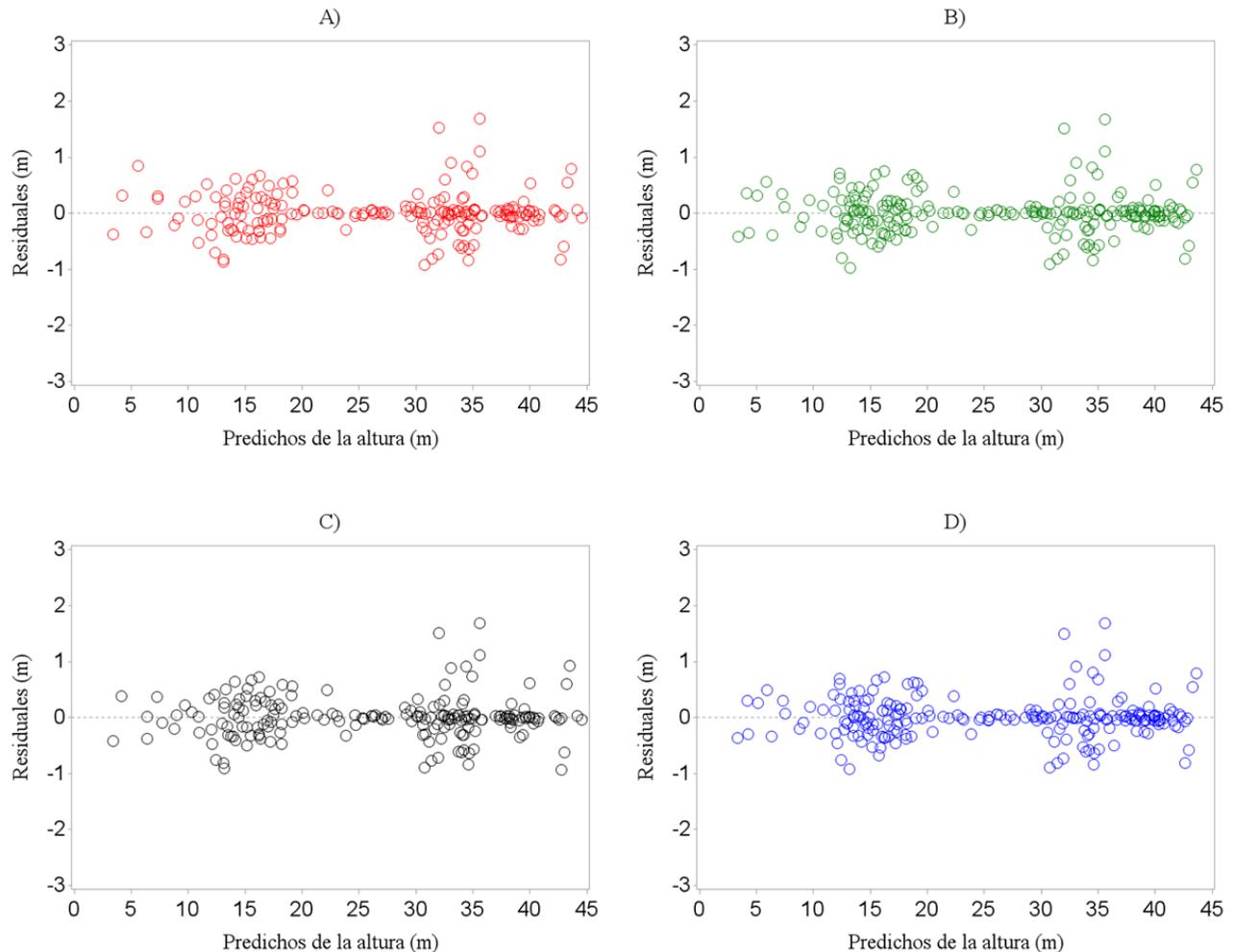


Figura 7. Comportamiento de los residuales vs valores predichos de la altura dominante. Ecuaciones con formulación en diferencia algebraica (ADA): A) Korf anamórfico b_0 (70 %) y B) Korf polimórfico b_1 (80 %); ecuaciones con formulación en diferencia algebraica generalizada (GADA): C) Chapman-Richards (70 %) y D) Korf (80 %).

Behavior of the residuals vs predicted values of the dominant height. Equations with formulation in algebraic difference approach (ADA): A) anamorphic korf b_0 (70 %) and B) polymorphic korf b_1 (80 %); Equations with formulation in generalized algebraic difference approach (GADA): C) Chapman-Richards (70 %) and D) Korf (80 %).

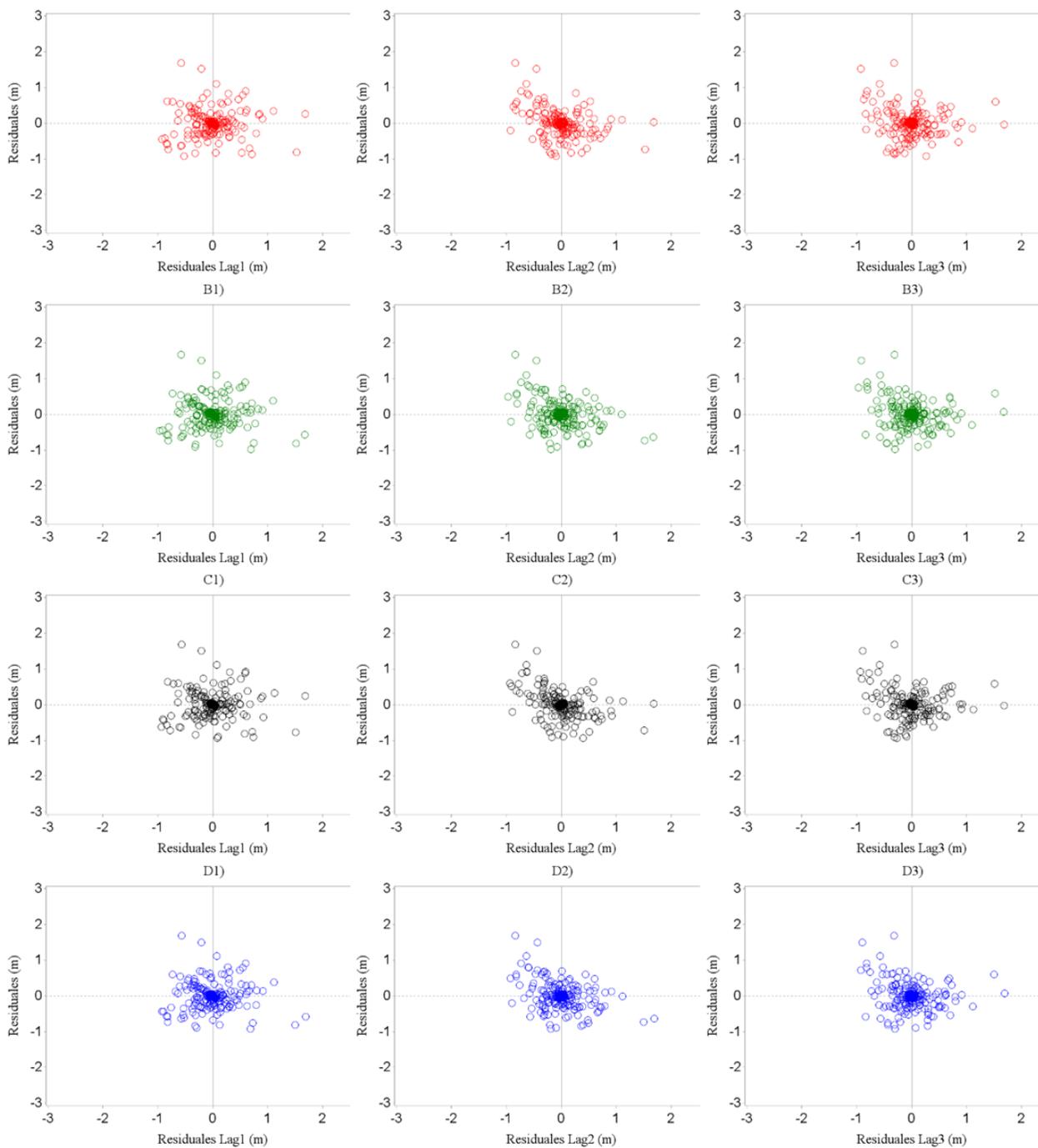


Figura 8. Gráficas de residuales vs residuales retardados. A1 a A3: residuales con uno (Lag1), dos (Lag2) y tres retardos (Lag3) para el modelo ADA de Korf anamórfico b_0 (70 %); B1 a B3: residuales con uno (Lag1), dos (Lag2) y tres retardos (Lag3) para el modelo ADA de Korf polimórfico b_1 (80 %); C1 a C3: residuales con uno (Lag1), dos (Lag2) y tres retardos (Lag3) para el modelo GADA de Chapman-Richards (70 %); D1 a D3: residuales con uno (Lag1), dos (Lag2) y tres retardos (Lag3) para el modelo GADA de Korf (80 %).

Plots of residuals vs. lag-residuals. A1 to A3: residuals with one (Lag1), two (Lag2) and three lags (Lag3) for the b_0 anamorphic Korf ADA model (70 %); B1 to B3: residuals with one (Lag1), two (Lag2) and three lags (Lag3) for the b_1 polymorphic Korf ADA model (80 %); C1 to C3: residuals with one (Lag1), two (Lag2) and three lags (Lag3) for the Chapman-Richards GADA model (70 %); D1 to D3: residuals with one (Lag1), two (Lag2) and three lags (Lag3) for the Korf GADA model (80 %).

AGRADECIMIENTOS

A la comunidad de Ixtlán de Juárez y la Dirección de Servicios Técnicos Forestales, por las facilidades otorgadas para la realización de esta investigación.

REFERENCIAS

- Arlot S, A Celisse. 2010. A survey of cross-validation procedures for model selection. *Statistics Surveys* 4: 40-79. DOI: <https://doi.org/10.1214/09-SS054>
- Bailey RL, JL Clutter. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science* 20: 155-159. DOI: <https://doi.org/10.1093/forestscience/20.2.155>
- Bates JM, CWJ Granger. 1969. The Combination of Forecasts. *Journal of the Operational Research Society* 20(4): 451-468. DOI: <https://doi.org/10.1057/jors.1969.103>
- Bengoa JL. 1999. Estimación de la altura dominante de la masa a partir de la "altura dominante de parcela". Ventajas frente a la altura dominante de Assman. *Investigación Agraria: Sistemas y Recursos Forestales* 1: 311-321.
- Bray DB, L Merino-Pérez, D Barry. 2005. Community Managed in the Strong Send of the Phrase. The Community Forest Enterprises of Mexico. In Bray DB, L Merino-Pérez, D Barry eds. *The Community Forests of Mexico. Managing for Sustainable Landscapes*. Austin, USA. University of Texas Press. 372 p. DOI: <https://doi.org/10.7560/706378-003>
- Bunn D. 1989. Forecasting with more than one model. *Journal of forecasting* 8(3): 161-166. DOI: <https://doi.org/10.1002/for.3980080302>
- Carrero O, M Jerez, R Macchiavelli, G Orlandoni, J Stock. 2008. Ajuste de curvas de índice de sitio mediante modelos mixtos para plantaciones de *Eucalyptus urophylla* en Venezuela. *Interiencia* 33(4): 265-272.
- Castillo-López A, B Vargas-Larreta, JJ Corral-Rivas, JA Nájera-Luna, F Cruz-Cobos, FJ Hernández. 2013. Modelo compatible altura-índice de sitio para cuatro especies de pino en Santiago Papasquiaro, Durango. *Revista mexicana de ciencias forestales* 4(18): 89-103. DOI: <https://doi.org/10.29298/rmcf.v4i18.391>
- Castillo-López A, W Santiago-García, B Vargas-Larreta, G Quiñonez-Barraza, R Solís-Moreno, JJ Corral-Rivas. 2018. Modelos dinámicos de índice de sitio para cuatro especies de pino en Oaxaca. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 9(49): 5-27. DOI: <https://doi.org/10.29298/rmcf.v9i49.185>
- Cieszewski CJ, RL Bailey. 2000. Generalized algebraic difference approach: theory based derivation of dynamic equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science* 46: 116-126. DOI: <https://doi.org/10.1093/forestscience/46.1.116>
- Cieszewski CJ. 2002. Comparing fixed- and variable-base-age site equations having single versus multiple asymptotes. *Forest Science* 48(1): 7-23. DOI: <https://doi.org/10.1093/forestscience/48.1.7>
- Clutter JL, JC Forstner, LV Pienaar, GH Brister, RL Bailey. 1983. *Timber Management: A Quantitative Approach*. New York, USA. John Wiley & Sons, Inc. 333 p.
- Diéguez-Aranda U, HE Burkhart, RL Amateis. 2006. Dynamic site model for loblolly pine (*Pinus taeda* L.) plantations in the United States. *Forest Science* 52(3): 262-272. DOI: <https://doi.org/10.1093/forestscience/52.3.262>
- Gadow KV, CY Zhang, C Wehenkel, A Pommerening, J Corral-Rivas, M Korol, S Myklush, GY Hui, A Kiviste, XH Zhao. 2012. Forest structure and diversity. In Pukkala T, K Gadow eds. *Continuous Cover Forestry Ecosystems*. Dordrecht, Netherlands. Springer. p. 29-84. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-2202-6_2
- Galindo-Soto JE, B Vargas-Larreta, FJ Hernández, F Cruz-Cobos. 2017. Modelo compatible altura dominante índice de sitio para mezquite (*Prosopis laevigata* Humb. et Bonpl. ex Willd) del semidesierto de Durango. *Revista Chapingo Serie Zonas Áridas* 16(1): 23-31. DOI: <https://doi.org/10.5154/r.rchsza.2015.10.16>
- García CX, C Toledo, J Hernández, JA Mendoza, A Hernández. 2021. Índice de sitio para plantaciones forestales comerciales de *Cedrela odorata* L. en Quintana Roo, México. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales* 12(64): 92-114. DOI: <https://doi.org/10.29298/rmcf.v12i64.793>
- González-Méndez M, F Cruz-Cobos, G Quiñonez-Barraza, B Vargas-Larreta, JA Nájera-Luna. 2016. Modelo de crecimiento en altura dominante para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en el estado de Guerrero. *Revista mexicana de ciencias forestales* 7(37): 7-20. DOI: <https://doi.org/10.29298/rmcf.v7i37.48>
- Guzmán-Santiago JC, OA Aguirre-Calderón, B Vargas-Larreta, M Gómez-Cárdenas, HM De los Santos-Posadas, G Quiñones-Barraza, P Marroquín-Morales. 2021. Ecuaciones de calidad de sitio para *Abies religiosa* en diferentes regiones de México. *Madera y bosques* 27(3). DOI: <https://doi.org/10.21829/myb.2021.2732232>
- Hernández-Cuevas M, W Santiago-García, HM De los Santos-Posadas, P Martínez-Antúnez, F Ruiz-Aquino. 2018. Modelos de crecimiento en altura dominante e índices de sitio para *Pinus ayacahuite* Ehren. *Agrociencia* 52(3): 437-453.
- Klooster D, S Ambinakudige. 2021. The Global Significance of Mexican Community Forestry. In Bray DB, L Merino-Pérez, D Barry eds. *The Community Forests of Mexico Managing for Sustainable Landscapes*. Austin, USA. University of Texas Press. p. 303-334. <https://doi.org/10.7560/706378-015>
- Krumland B, H Eng. 2005. *Site Index Systems for Major Young-Growth Forest and Woodland species in Northern California*. Sacramento, USA. California Dept. of Forestry & Fire Protection. 218 p.
- Martín-Benito D, M Del Río-Gaztelurrutia, I Cañellas-Rey de Viñas. 2007. Estudio de la variabilidad interregional en los modelos de crecimiento en altura dominante y calidad de estación de *Pinus nigra* Arn. en la Península Ibérica. *Cuadernos de la Sociedad Española de Ciencias Forestales* 23: 221-226. DOI: <https://doi.org/10.31167/csef.v0i23.9628>
- Morris PA. 1974. Decision analysis expert use. *Management Science* 20(9): 1233-1241. <https://doi.org/10.1287/mnsc.20.9.1233>
- Nava-Nava A, W Santiago-García, G Rodríguez-Ortiz, HM De los Santos-Posadas, F Ruiz-Aquino, E Santiago-García, ME Suárez-Mota. 2020. Ecuaciones dinámicas de crecimiento en altura dominante e índice de sitio para *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. & Cham. *Fitotecnia Mexicana* 43(4): 461-470. DOI: <https://doi.org/10.35196/rfm.2020.4.470>
- Nava-Nava A, W Santiago-García, G Quiñonez-Barraza, HM de los Santos-Posadas, JR Valdez-Lazalde, G Ángeles-Pérez. 2022. Climatic and topographic variables improve estimation accuracy of patula pine forest site productivity

- in southern Mexico. *Forests* 13(8): 1277. DOI: <https://doi.org/10.3390/f13081277>
- Özçelik R, QV Cao, G Trincado, N Göçer. 2018. Predicting tree height from tree diameter and dominant height using mixed-effects and quantile regression models for two species in Turkey. *Forest Ecology and Management* 419: 240-248. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2018.03.051>
- Quiñonez-Barraza G, HM De los Santos-Posadas, F Cruz-Cobos, A Velázquez-Martínez, G Ángeles-Pérez, G Ramírez-Valverde. 2015. Índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. *Agrociencia* 49(4): 439-454.
- R Core Team. 2017. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <<http://www.R-project.org>>.
- Salas C, P Real. 2013. Biometría de los bosques naturales de Chile: estado del arte. In Donoso P, A Promis. Silvicultura en los bosques nativos: avances en la investigación en Chile. Argentina y Nueva Zelanda. Valdivia, Chile. p. 109-151.
- Santiago-García W, G Ángeles-Pérez, G Quiñonez-Barraza, HM De los Santos-Posadas, G Rodríguez-Ortiz. 2020a. Avances y perspectivas en la modelación aplicada a la planeación forestal en México. *Madera y Bosques* 26(2). DOI: <https://doi.org/10.21829/myb.2020.2622004>
- Santiago-García W, AH Jacinto-Salinas, G Rodríguez-Ortiz, A Nava-Nava, E Santiago-García, G Ángeles-Pérez, JR Enriquez-del Valle. 2020b. Generalized height-diameter models for five pine species at Southern Mexico. *Forest Science and Technology* 16: 49-55. DOI: <https://doi.org/10.1080/1580103.2020.1746696>
- Santiago-García W, L Bautista-Pérez, G Rodríguez-Ortiz, G Quiñonez-Barraza, F Ruiz-Aquino, ME Suárez-Mota, E Santiago-García, T Leyva-Pablo, M Cortés-Pérez, MdJ González-Guillén. 2022. Comparative analysis of three forest management plans in southern Mexico. *Forests*, 13(3): 393. DOI: <https://doi.org/10.3390/f13030393>
- Santiago-García W, HM De los Santos-Posadas, G Ángeles-Pérez, JR Valdez-Lazalde, JJ Corral-Rivas, G Rodríguez-Ortiz, E Santiago-García. 2015. Modelos de crecimiento y rendimiento de totalidad del rodal para *Pinus patula*. *Madera y Bosques* 21(3): 95-110. DOI: <https://doi.org/10.21829/myb.2015.213459>
- Santiago-García W, HM De los Santos-Posadas, G Ángeles-Pérez, JR Valdez-Lazalde, HD Del Valle-Paniagua, JJ Corral-Rivas. 2013. Self-thinning and density management diagrams for *Pinus patula* fitted under the stochastic frontier regression approach. *Agrociencia* 47: 75-89.
- SAS Institute Inc. 2017. SAS/ETS® 9.4 User's Guide. Cary, USA. 376 p. Consultado 25 noviembre 2022. Disponible en https://www.sas.com/es_mx/home.html
- Seppänen P, A Mäkinen. 2020. Comprehensive yield model for plantation teak in Panama. *Silva Fennica*. 54(5). DOI: <https://doi.org/10.14214/sf.10309>
- STF (Servicios Técnicos Forestales de Ixtlán de Juárez, MX). 2015. Programa de manejo forestal para el aprovechamiento y conservación de los recursos forestales maderables de Ixtlán de Juárez. Ciclo de corta 2015-2024. Oaxaca, México. Servicios Técnicos Forestales de Ixtlán de Juárez. 423 p.
- Scolforo JR, R Maestri, AC Ferraz, JM De Mello, A De Oliveira, AL De Assis. 2013. Dominant height model for site classification of *Eucalyptus grandis* incorporating climatic variables. *International Journal of Forestry Research* 2013: 1-7. DOI: <https://doi.org/10.1155/2013/139236>
- Snee RD. 1977. Validation of regression models: Methods and examples. *Technometrics* 19(4): 415-428. DOI: <https://doi.org/10.1080/00401706.1977.10489581>
- Socha J, L Tymiąska-Czabańska, K Bronisz, S Zięba, P Hawryło. 2021. Regional height growth models for Scots pine in Poland. *Scientific Reports* 11(1): 1-14. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-021-89826-9>
- Tamarit-Urias JC, HM De los Santos-Posadas, A Aldrete, JR Valdez-Lazalde, H Ramírez-Maldonado, V Guerra-De la Cruz. 2014. Ecuaciones dinámicas de índice de sitio para *Tectona grandis* en Campeche, México. *Agrociencia* 48: 225-238.
- Tedeschi LO. 2006. Assessment of the adequacy of mathematical models. *Agricultural systems* 89: 225-247. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.agsy.2005.11.004>
- Terui N, HK Van Dijk. 2002. Combined forecasts from linear and nonlinear time series models. *International Journal of Forecasting* 18(3): 421-438. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0169-2070\(01\)00120-0](https://doi.org/10.1016/S0169-2070(01)00120-0)
- Torres-Rojo JM, R Moreno-Sánchez, MA Mendoza-Briseño. 2016. Sustainable forest management in Mexico. *Current Forestry Reports* 2(2): 93-105. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40725-016-0033-0>
- Vanclay JK. 1994. Modelling Forest Growth and Yield: Applications to Mixed Tropical Forests. Copenhagen, Denmark. CAB International. 312 p.
- Vargas-Larreta B, JG Álvarez-González, JJ Corral-Rivas, OA Aguirre-Calderón. 2010. Construcción de curvas dinámicas de índice de sitio para *Pinus cooperi* Blanco. *Revista Fitotecnia Mexicana* 33: 343-351. DOI: <https://doi.org/10.35196/rfm.2010.4.343>
- Vargas-Larreta B, OA Aguirre-Calderón, JJ Corral-Rivas, F Crecente-Campo, U Diéguez-Aranda. 2013. Modelo de crecimiento en altura dominante e índice de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en el noreste de México. *Agrociencia* 47: 91-106.
- White H. 1980. A heteroscedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroscedasticity. *Econometrica* 48: 817-838. DOI: <https://doi.org/10.2307/1912934>
- Zhang Y, Y Yang. 2015. Cross-validation for selecting a model selection procedure. *Journal of Econometrics* 187: 95-112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2015.02.006>

Recibido: 25.09.21
Aceptado: 21.10.22