

Estimación de volumen comercial en latifoliadas

Estimating merchantable volume for deciduous trees

GUILLERMO TRINCADO¹, KLAUS VON GADOW², VICTOR SANDOVAL¹

¹ Instituto de Manejo Forestal, Universidad Austral de Chile, Casilla 567, Valdivia, Chile.

² Institute of Forest Management and Yield Science, University of Göttingen, Büsgenweg 5, D 37077, Göttingen, Germany.

SUMMARY

The paper presents an application of two methods of estimating merchantable volume in deciduous trees. The first method uses a volume ratio equation system and the second a taper equation. Compatibility for deciduous trees is achieved with modifications and/or transformations of the models. Suggestions for a practical application in form of code-programs for a correct utilization of proposed models are given.

Key words: volume ratio equation, taper equation, deciduous trees.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit stellt eine praktische Anwendung von zwei Methoden für die Volumenberechnung bis zu einem beliebigen Zopfdurchmesser dar. Die erste Methode verwendet eine Volumenverhältnissgleichung-System und die zweite eine Schaftfunktion. Bei beiden Methoden wurde eine Kompatibilität erreicht, durch Anwendung von Transformationem und/oder Modifikationem der genannten Funktionem. Schließlich werden verschiedene Pascal-Codeprogramme für eine richtige Anwendung der entwickelten Methoden gegeben.

Schlagwörter: Volumenverhältnissgleichung, Schaftfunktion, Laubbäume.

RESUMEN

El presente trabajo muestra dos métodos alternativos para la estimación de productos de árboles en pie para latifoliadas. El primero de ellos utiliza un sistema de funciones de razón y el segundo una función de ahusamiento. Para ambos fue necesario realizar modificaciones y/o transformaciones para lograr una compatibilidad de su uso en latifoliadas. Finalmente se entregan algunas indicaciones en forma de aplicaciones computacionales para una correcta utilización de los modelos desarrollados.

Palabras claves: funciones de razón, modelos de ahusamiento, latifoliadas.

1. INTRODUCCION

La estimación de volúmenes comerciales de árboles en pie es uno de los problemas más importantes en dendrometría forestal. El volumen total de un árbol individual puede ser estimado con una considerable exactitud mediante el empleo de funciones de volumen (Kramer y Akça 1995). Sin embargo este tipo de funciones permite la estimación de volumen sólo hasta un determinado índice de utilización. Se han realizado ajustes independientes de funciones para distintos índices, pero se ha comprobado empíricamente que se producen

estimaciones inconsistentes dado que se presentan problemas de cruzamiento entre curvas (Burkhart 1977). Debido a la poca flexibilidad de este tipo de funciones se han desarrollado nuevos métodos para una determinación directa de volúmenes hasta un determinado índice de utilización o entre dos límites de utilización. Dentro de estos métodos se cuentan las funciones de razón, que estiman el volumen hasta un determinado índice como un porcentaje del volumen total del árbol (Cao *et al.* 1980, van Deusen *et al.* 1981), y las funciones de ahusamiento que son funciones matemáticas que tienen la capacidad de describir el perfil fustal de

un árbol (Real y Moore 1986, Newham 1992, Gál y Bella 1994). Ambos métodos han sido desarrollados principalmente para especies que presentan un tipo de fuste escurrente como es el caso de las coníferas. En este estudio se describe una metodología para la utilización de funciones de razón y ahusamiento en especies de latifoliadas.

2. MATERIAL

El material consistió en una muestra de 542 árboles de *Fagus sylvatica* L. facilitada por la Administración Forestal de Baja Sajonia en Alemania. Para cada uno de los árboles muestras se midió

una serie de diámetros con corteza. La primera medición fue realizada a una altura de 1 m sobre el suelo, las siguientes mediciones se realizaron a partir de este punto en intervalos de 2 m hasta la altura de comienzo de copa (*Hcc*). Se consideró igualmente la medición del diámetro a 1.3 m sobre el suelo (*d_{1.3}*) y el diámetro a la altura de comienzo de copa (*dcc*).

Sólo se consideraron árboles que presentaran un decrecimiento diametral con la altura fustal, y que permitieran a lo menos siete mediciones diametrales a lo largo del fuste principal hasta la altura comienzo de copa (*Hcc*). El cuadro 1 muestra la estadística descriptiva de los árboles utilizados en el estudio.

CUADRO 1

Estadística descriptiva de 542 árboles muestras utilizados en el estudio.
Descriptive statistic of 542 sampled trees utilized in this study.

Estadístico	<i>H(m)</i>	<i>d_{1.3}(cm)</i>	<i>Hcc (m)</i>	<i>dcc (cm)</i>
Mínimo	19.50	15.90	8.20	6.64
Máximo	41.50	81.50	25.70	58.90
Media	27.95	33.10	16.53	19.01
Desviación estándar	4.15	11.06	3.45	8.20
Coefficiente variación (%)	14.83	34.42	20.85	43.14

3. METODO

Se calculó el volumen de cada uno de los árboles muestras hasta la altura de comienzo de copa, mediante cubicación de las secciones individuales. La primera sección fue cubicada asumiendo el perfil de un cilindro y las restantes secciones hasta la altura de comienzo de copa mediante la fórmula de Smalian (Avery y Burkhart 1994).

3.1. *Funciones de razón.* Burkhart (1977) propone la siguiente función de razón para el cálculo de volúmenes hasta cualquier índice de utilización *d*:

$$R_d = \frac{V_d}{V} = 1 + a_0 d^{a_1} d_{1.3}^{a_2} \quad (1)$$

donde:

- R_d* = Razón de volúmenes para un índice de utilización dado;
- V_d* = Volumen (m³) con corteza hasta un índice de utilización *d* (cm);
- V* = Volumen total (m³) con corteza;

d_{1.3} = Diámetro a 1.3 m sobre el suelo (cm);
a₀, a₁, a₂ = parámetros de la función.

En base a la función (1) se desarrolló la siguiente función de dos parámetros para latifoliadas:

$$R_d = \frac{V_d}{V_{cc}} = 1 + a_0 \left[\frac{d - dcc}{d_{1.3} - dcc} \right]^{a_1} \quad d \geq dcc ; d_{1.3} > dcc \quad (2)$$

donde:

- dcc* = Diámetro comienzo de copa (cm);
- V_{cc}* = Volumen (m³) con corteza hasta comienzo de copa;
- a₀, a₁* = parámetros de la función.

La función (2) está condicionada a entregar el volumen acumulado hasta la altura de comienzo de copa sólo cuando el índice de utilización *d* y el diámetro a comienzo de copa *dcc* son iguales. Cao *et al.* (1980) construyeron una función de razón para poder realizar el cálculo de volúmenes *V_h* para diversas alturas fustales *h*:

CUADRO 2

$$R_h = \frac{V_h}{V} = 1 + b_0(H-h)^{b_1} H^{b_2} \quad (3)$$

donde:

- R_h = Razón de volúmenes hasta una altura h dada;
- H = Altura total (m);
- h = Altura fustal (m);
- b_0, b_1, b_2 = parámetros de la función.

Mediante un simple intercambio de variables y la eliminación de uno de los parámetros la función (3) toma la siguiente forma para latifoliadas:

$$R_h = \frac{V_h}{V_{cc}} = 1 + b_0 \left[1 - \frac{h}{H_{cc}} \right]^{b_1} \quad h \leq H_{cc} \quad (4)$$

donde:

- H_{cc} = Altura comienzo de copa (m);
- b_0, b_1 = parámetros de la función.

Esta función está condicionada para calcular el volumen hasta comienzo de copa sólo cuando la altura de fustal o de utilización h y la altura de comienzo de copa H_{cc} son iguales. Para la implementación de un sistema de funciones de razón fue necesario contar con una función estimadora de volumen con corteza hasta comienzo de copa. En este caso se utilizó la función de volumen propuesta por Honer (1965):

$$V_{cc} = b_0 + b_1 d_{1,3}^2 H_{cc} \quad (5)$$

Los parámetros estimados y algunos estadísticos indicadores de la bondad de ajuste de las funciones anteriormente derivadas para latifoliadas se muestran en el cuadro 2.

A partir de los parámetros estimados de la función (2) es posible el cálculo de las razones R_d para diversos límites de utilización d , dado un cierto diámetro a comienzo de copa d_{cc} . La consistencia lograda en el cálculo de las razones R_d se muestra en la figura 1.

Parámetros estimados y estadística para las funciones de razón (2) y (4) y la función de volumen (5).
Parameter estimates and statistics for the volume ratio equations (2) and (4) and the volume equation (5).

Función Nr	Parámetros estimados		Estadísticos	
	b_0	b_1	r^2 (a)	$S_{y.x}$ (b)
(2)	-0.89407289	1.53993505	0.8677	0.0870
(4)	-0.94986958	1.32018031	0.9907	0.0231
(5)	0.01878700	0.00005235	0.9860	0.1170

- (a) Coeficiente de determinación.
- (b) Error estándar en la estimación.

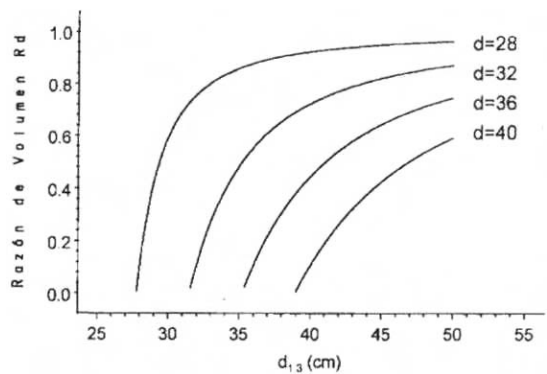


Figura 1: Razón de volúmenes R_d (2) para diversos índices de utilización ($d_{cc} = 25$ cm).
Volume ratios R_d (2) for different merchantable limits ($d_{cc} = 25$ cm).

Despejando d de la función (2) y luego reemplazando la razón R_h de la función (4), se puede determinar el diámetro d para una altura h dada:

$$d = d_{cc} + \left[\frac{(R_h - 1)}{a_0(d_{1,3} - d_{cc})^{-a_1}} \right]^{\frac{1}{a_1}} \quad (6)$$

Realizando la operación inversa es posible, a partir de la función (4), determinar fácilmente la altura h para un diámetro d dado:

$$h = Hcc \left[1 + \left(\frac{R_d - 1}{b_0} \right)^{\frac{1}{h_1}} \right] \quad (7)$$

Ejemplo 1. Para una utilización práctica de las funciones derivadas se debe calcular el diámetro y el volumen acumulado hasta una altura de 16 m para un árbol que presenta un $d_{1,3} = 60.9$ cm, $Hcc = 20.2$ y un $d_{cc} = 42.3$ cm. Empleando el programa Pascal *Sistemat.pas* de la figura 2 se determinó $d_{16} = 47.33$ cm y $V_{16} = 3.470$ m³.

```

program sistemat;
const a0 = -0.89407289; a1 = 1.53993505; {función 1}
      b0 = -0.94986958; b1 = 1.32018031; {función 2}
      c0 = 0.01878700; c1 = 0.00005235; {función 3}
var dap,Hcc,dcc,hx : real;

function power(x,a:real):real; {x=base, a=exponente}
begin if x>0 then power:=exp(a*ln(x)) else power:=0 End;

procedure Calcular;
var Rh,Vcc,vx,dx : real;
begin
Rh := 1 + b0*Power(((Hcc-hx)/Hcc),b1);
Vcc := c0+c1 *sqr(dap)*Hcc;
dx := dcc+Power((((Rh-1)/(a0*power(dap-dcc,-a1))),1/a1));
vx := Vcc*Rh;
writeln('El diámetro para una altura de', hx:5:1,' [m] es', dx:6:2,'
[cm]');
writeln('y el volumen acumulado hasta esa altura es',vx:6:3,' [m3]');
end;

begin {Programa Principal}
dap:=60.9; Hcc:=20.2; dcc:=42.3; hx:=16;
Calcular;
readln;
end.
    
```

Figura 2. Código Pascal para el cálculo de diámetros y volúmenes mediante la utilización de un sistema de funciones de razón.

Pascal code for calculating diameters and volume using a volume ratio system.

3.2. Función de ahusamiento. Para este estudio se eligió la función de ahusamiento propuesta por Brink y Gadow (1986), la cual ha sido recientemente modificada por Riemer *et al.* (1995). Para una utilización de la función de ahusamiento en especies de fuste deliquescente (latifoliadas) se efectuó una modificación de todos los radios con corteza $r_{(h)}$ medidos a lo largo del fuste. La modi-

ficación consistió en sustraer de cada uno de ellos el radio a la altura de comienzo de copa r_{cc} (Fowler y Rennie 1988, Trincado 1996). De esta manera se logra para cada uno de los árboles muestras un perfil semejante al de las coníferas, presentando un radio igual a cero $r_{(h=Hcc)} = 0$ a la altura comienzo de copa. La transformación de variables se muestra esquemáticamente en la figura 3.

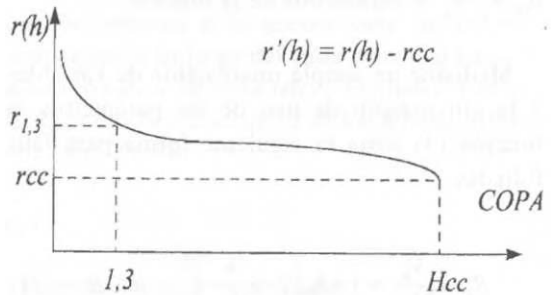


Figura 3. Presentación esquemática de un perfil fustal hasta el comienzo de copas en latifoliadas.

Graphical representation of a trunk profile of a deciduous tree up to the crown base.

La función de ahusamiento toma para latifoliadas la siguiente forma:

$$r'_{(h)} = i + (r'_{1,3} - i) \frac{e^{p(1,3-h)} - e^{p(1,3-Hcc)}}{1 - e^{p(1,3-Hcc)}} - i \frac{e^{q(h-Hcc)} - e^{q(1,3-Hcc)}}{1 - e^{q(1,3-Hcc)}} \quad (8)$$

$$= u + v e^{-ph} - w e^{qh}$$

donde:

$$u = \frac{i}{1 - e^{q(1,3-Hcc)}} - \frac{(r'_{1,3} - i) e^{p(1,3-Hcc)}}{1 - e^{p(1,3-Hcc)}}; \quad v = \frac{(r'_{1,3} - i) e^{1,3p}}{1 - e^{p(1,3-Hcc)}}; \quad w = \frac{i e^{-qHcc}}{1 - e^{q(1,3-Hcc)}}$$

$r'_{(h)}$ = Radio transformado (cm) a una altura h (m), correspondiente a un radio con corteza a una altura dada $r_{(h)}$ menos el radio a comienzo de copa r_{cc}

Hcc = Altura comienzo de copa (m)

$r'_{1,3}$ = Radio a 1.3 m transformado, correspondiente al radio con corteza a 1.3 m menos el radio a comienzo de copa r_{cc}

i - Parámetro asintótico (Brink y Gadow 1986)

p = Parámetro parte inferior del fuste

q = Parámetro parte superior del fuste.

La estimación de los parámetros fue realizada empleando el método de minimización del error para modelos no lineales propuesto por Levenberg y Marquardt (SAS Institute 1989). Los parámetros estimados a través de este método y algunos estadísticos indicadores de la bondad de ajuste se muestran en el cuadro 3.

CUADRO 3

Parámetros estimados y estadísticos para el ajuste de la función modificada de Brink a radios transformados, donde $f = i/r_{1.3}$.

Parameter estimates for the modified Brink-function on transformed measurements of tree radius, with $f = i/r_{1.3}$.

Parámetros estimados			Estadísticos	
f	P	q	r^2	$S_{y.x}$
0.808894	0.692141	0.085243	0.9616	0.5637

Para la determinación del radio real $r_{(h)}$ se debe sumar al radio transformado el radio a comienzo de copa, derivándose así la siguiente fórmula:

$$r_{(h)} = r'_{(h)} + rcc = u + v e^{ph} - w e^{qh} + rcc \quad (9)$$

Posteriormente el volumen entre dos alturas puede ser obtenido calculando el volumen de un sólido de revolución:

$$V_{(h_2, h_1)} = \pi \int_{h_1}^{h_2} r_{(h)}^2 dh \quad h_2 > h_1 ; \quad h_2 \leq Hcc \quad (10)$$

donde:

$$r_{(h)}^2 = r'^2_{(h)} + 2 r'_{(h)} rcc + rcc^2.$$

Reemplazando (9) en (10) resulta:

$$V_{(h_2, h_1)} = \pi \left[u^2(h_2 - h_1) - 0.5 \left\{ \frac{v^2}{p} (e^{-2ph_2} - e^{-2ph_1}) - \frac{w^2}{q} (e^{2qh_2} - e^{2qh_1}) \right\} - 2 \left\{ \frac{uv}{p} (e^{-ph_2} - e^{-ph_1}) + \frac{vw}{q} (e^{qh_2} - e^{qh_1}) - \frac{vw}{p-q} (e^{(q-p)h_2} - e^{(q-p)h_1}) \right\} \right] + 2\pi rcc \left[\left(u + \frac{rcc}{2} \right) (h_2 - h_1) - \frac{v}{p} (e^{-ph_2} - e^{-ph_1}) - \frac{w}{q} (e^{qh_2} - e^{qh_1}) \right] \quad (11)$$

Ejemplo 2. En base a los parámetros estimados para la función de ahusamiento se desea calcular el diámetro y el volumen para el árbol seleccionado en el ejemplo 1. Utilizando el programa Pascal *Sistema2.pas* dado en la figura 4 se determinó $d_{16} = 47.96$ cm y $V_{16} = 3.782$ m³.

```

program sistema2;
const f=0.808894; p=0.692141; q=0.085243;
var dap,Hcc,dcc,dapt,rcc,hx : real;

procedure Calcular;
var i,m,n,s,t,u,v,w,dx,vx;
    x1,x2,x3,x4,x5,x6 : real;
begin
{Radio}
i:=f*dapt;
m:=p*(1.3-Hcc); s:=1-exp(m);
n:=q*(1.3-Hcc); t:=1-exp(n);
u:=i/t-(((dapt-i)*exp(m))/s);
v:=((dapt-i)*exp(p*1.3))/s;
w:=(i*exp(-q*Hcc))/t;
dx:=2*(u+v*exp(-p*hx)-w*exp(q*hx)+(dcc/2));
{Volumen}
x1:=(1-exp(-2*p*hx))*(sqrt(v)/(2*p));
x2:=(1-exp(2*q*hx))*(sqrt(w)/(2*q));
x3:=(1-exp(-p*hx))*((2*u*v)/p);
x4:=(1-exp(q*hx))*((2*u*w)/q);
x5:=(1-exp((q-p)*hx))*((2*v*w)/(p-q));
x6:=(u+(dcc/4))*hx+(1-exp(-p*hx))*(v/p)+(1-exp(q*hx))*(w/q);
vx:=0.0003142*(sqrt(u)*hx+x1-x2+x3+x4-x5)+0.0006283*(cc/2)*x6;
writeln('El diámetro para una altura de ',hx:5:1,' [m] es ',dx:6:2,' [cm]');
writeln('y el volumen acumulado hasta esa altura es ',vx:6:3,' [m3]');
end

begin {Programa Principal}
dap:=60.9; Hcc:=20.2; dcc:=42.3;
dapt:=(dap-dcc)/2; hx:=16;
Calcular;
readln;
end.
    
```

Figura 4. Código Pascal para el cálculo de diámetros y volúmenes mediante la utilización de una función de ahusamiento.

Pascal code for calculating diameters and volume using a taper equation.

4. DISCUSION Y CONCLUSIONES

A través de este estudio se comprueba la posibilidad del desarrollo de una metodología que permite el empleo de dos sistemas de estimación volumétrica, un sistema de funciones de razón y funciones de ahusamiento, los cuales han sido utilizados principalmente en especies de fuste escurrente (coníferas). El sistema de funciones de razón muestra una consistencia en la determinación volumétrica, no presentando entrecruzamiento de las curvas y permitiendo además mediante la utilización de ambas razones la estimación directa del diámetro dada una cierta altura y viceversa. La función de ahusamiento, por otro lado, es un tipo de función más compleja en cuanto a su estructura y la estimación de parámetros, pero presenta una mayor flexibilidad por tratarse de sólo una función. A través de los ejemplos numéricos se comprueba que ambos métodos entregan resultados similares.

Se hace necesario ahondar más en el estudio de las funciones propuestas, las cuales podrían permitir una mejor estimación de productos en bosques nativos de latifoliadas.

5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen muy especialmente a la Administración Forestal de Baja Sajonia en Alemania, por haber aportado la información necesaria en el desarrollo del estudio.

6. BIBLIOGRAFIA

- AVERY, T.E., H.E. BURKHART. 1994. *Forest Measurements*, 4th edition. Mc Graw Hill, 407 pp.
- BRINK, C., K. v. GADOW. 1986. "On the use of growth and decay functions for modelling stem profiles", *EDV in Medizin u. Biologie*, 17 (1/2): 20-27.
- BURKHART, H.E. 1977. "Cubic-foot volume of loblolly pine to any merchantable top limit", *S. J. Appl. For.* 1(2): 7-9.
- CAO, Q.V., H.E. BURKHART, T.A. MAX. 1980. "Evaluation of two methods for cubic-foot volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit", *For Sci.*, 26: 71-80.
- FOWLER, J. H., J. C. RENNIE. 1988. "Merchantable height in lieu of total height in stem profile equations", *For. Sci.*, 34 (2): 505-511.
- GAL, J., I.E. BELLA. 1994. "New stem taper functions for 12 Saskatchewan timber species", *Nat. Resour. Can. For. Serv. Northwest Reg. North. For Cent. Edmonton, Alberta. Inf. Rep. NOR-X-338*, 25 pp.
- HONER, T. G. 1965. "The use of height and squared diameter ratios for estimation of cubic foot volume equations", *For. Chron.* 40: 324-331.
- KRAMER, H., A. AKCA. 1995. "Leitfaden für Waldmesslehre". 3. erweiterte Auflage, J. D. Sauerländer's Verlag, Frankfurt am Main. 266 s.
- NEWHAM, R. M. 1992. "Variable-form taper functions for Alberta tree species", *Can. J. For. Res.* 22: 210-223.
- REAL, P. L., J. A. MOORE. 1986. "An individual tree system for Douglas-fir in the inland north-west", pp. 1037-44 in Ek, A. R.; Shifley, S. R.; Burk, T.E. "Forest growth modelling and prediction". Proceeding of IUFRO Conference, 24-28 August 1986, Minneapolis, Minnesota. USDA Forestry Service General Technical Report NC-120.
- RIEMER, Th., K. v. GADOW, B. SLOBODA. 1995. "Ein Modell zur Beschreibung von Baumschäften", *Allg. Forst- und J.-Ztg.* 166 (7): 144-147.
- SAS INSTITUTE INC. 1989. *SAS/STAT User's Guide*. Version 6, Fourth Edition, Vol. 2, Cary, NC. SAS Institute Inc., pp. 1135-1193.
- TRINCADO, G. 1996. "Modellierung der Schaftform von Fichten (*Picea abies*) und Buchen (*Fagus sylvatica*)". Wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung des Grades Magister der tropischen Forstwirtschaft der Georg August Universität Goettingen, 50 pp.
- VAN DEUSEN, P.C., A.D. SULLIVAN, T.G. MATNEY. 1981. "A prediction system for cubic foot volume of loblolly pine applicable through much of its range", *S. J. Appl. For.* 5: 186-189.