

ARTICULOS

Aplicación de interpolación "spline" cúbica en la estimación de volumen

Application of cubic "spline" interpolation in the estimation of volume

GUILLERMO TRINCADO V., JAIME VIDAL B.

Instituto de Manejo Forestal, Universidad Austral de Chile, Casilla 567, Valdivia, Chile.

SUMMARY

This study introduces the "spline" functions with the purpose of testing their utility in estimating tree volume. The "spline" functions consists in a group of cubic equations that fittings to a series of points interpolate with exactness values between each point. These functions estimate the value of diameters to given heights or commercial volumes and heights to given diameters. This study presents the development of the "spline" functions and their application in estimating volume in Lenga (*Nothofagus pumilio*).

Key words: "spline" function, volume estimation.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine praktische Anwendung einer kubische "Spline"-Interpolation, die als "Spline"-Funktion bekannt ist, dargestellt. Die Methode könnte eine Alternative sein, für die Sortimentsschätzung bei Laubäume ohne Schaftfunktionen. Diese "Spline"-Funktionen erlauben die Durchmesserbestimmung bei einer beliebigen Höhe, Höhenbestimmung bei einem beliebigen Durchmesser und Sortimentvolumina bei einem beliebigen Zopfdurchmesser genauso wie eine Schaftfunktion. Ausserdem, diese Arbeit zeigt eine teoretische Einleitung der "Spline"-Funktionen sowie vorgegebene Ergebnisse Ihrer Anwendung bei Lenga (*Nothofagus pumilio*).

Schlagwörter: "Spline"-Interpolation, Volumenschätzung.

RESUMEN

Se presenta una aplicación de las funciones de interpolación cúbica segmentaria, conocidas como funciones "spline", como una alternativa de cubicación para aquellas especies de latifoliadas que no poseen funciones de ahusamiento. Las funciones "spline" permiten, al igual que las funciones de ahusamiento, la estimación de diámetros a alturas dadas, alturas a diámetros dados y volúmenes comerciales para un determinado índice de utilización. Este estudio entrega el desarrollo teórico de las funciones "spline", al igual que algunos resultados preliminares obtenidos al implementar el sistema para realizar la estimación de volúmenes en Lenga (*Nothofagus pumilio*).

Palabras claves: funciones "spline", estimación de productos.

1. INTRODUCCION

La tendencia del sector forestal productivo es a aumentar la cantidad y calidad de los productos a extraer del bosque, sobre todo si se trata de rodales naturales y sin manejo como es el caso de los bosques nativos de nuestro país. Esto hace necesario contar con nuevas herramientas que permitan obtener una información volumétrica a nivel de productos más exacta que la lograda al utilizar métodos de predicción tradicionales.

Una posible técnica alternativa es la aplicación de interpolación cúbica segmentaria o funciones "spline" en estimación de variables dasométricas tales como diámetro a distintas alturas, alturas a distintos diámetros y especialmente volúmenes totales o hasta un determinado índice de utilización.

El origen del concepto *spline* proviene del uso de una lámina de plástico delgada llamada curvígrafo ("spline") en el trazado de curvas suaves a través de un conjunto de puntos (Sheid 1991). Las funciones "spline" son ecuaciones cúbicas que modelan el comportamiento de las curvas realizadas por dicho instrumento, permitiendo unir en forma suave y continua una serie de puntos. Debido a esta característica las funciones "spline" han encontrado en el sector forestal una gran variedad de aplicaciones. Wahba (1976), citado por Goulding (1979), utilizó funciones "spline" para adaptar una curva a un histograma y obtener una función probabilística de densidad empírica. Más tarde Liu (1980) demostró que, dada una serie de mediciones de radios distribuidos a lo largo del fuste, es posible, a partir de funciones "spline", la construcción de modelos segmentados que aproximan la forma fustal con mucha exactitud. Se ha comprobado que una función "spline" estima el volumen con mayor exactitud y precisión que la fórmula de Smalian, utilizando mediciones de diámetro a intervalos irregulares efectuadas con dendrómetros ópticos (Goulding 1979). Saborowski *et al.* (1981) utilizan este tipo de funciones en la estimación de volúmenes en plantaciones jóvenes; de Picea y Nagel & Athari (1982) las emplean como herramienta para la realización de análisis fustales.

A través de este estudio se describe una metodología posible de implementar para su utilización en la estimación de productos en árboles en pie, tomando como ejemplo práctico resultados preliminares obtenidos para bosques Lengua (*Nothofagus pumilio*) de la XII Región.

2. INTERPOLACION CUBICA SEGMENTARIA

La interpolación consiste en estimar valores intermedios entre cada par de puntos o nodos que componen una serie de datos (Chapra y Raymond 1988). La interpolación segmentaria en lugar de emplear un único polinomio de aproximación de alto grado para la totalidad de los datos, calcula un polinomio entre cada par de puntos, los cuales unidos forman un continuo (Atkinson y Arley 1983).

El tipo más simple de interpolación segmentaria es la interpolación lineal segmentaria, que consiste en unir un conjunto de puntos con una serie de líneas rectas. La desventaja de aproximar usando funciones de este tipo es que en cada uno de los extremos de los intervalos no existe una unión continua. El problema anterior se soluciona al utilizar interpolación cúbica segmentaria ("spline"), la cual asegura la continuidad de la curva en los extremos de los intervalos al utilizar polinomios cúbicos entre cada par de datos. Este tipo de polinomios posee cuatro constantes, lo cual le confiere suficiente flexibilidad como para asegurar la primera y segunda derivada continuas, logrando una unión suave entre los segmentos que forman la curva, y evitando las posibles oscilaciones que ocurrirían con polinomios de alto grado (Sheid 1991). Matemáticamente una función "spline" cúbica queda definida por la siguiente expresión (Burden *et al.* 1991):

$$S_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \chi_i(x - x_i)^2 + \delta_i(x - x_i)^3 \quad [1]$$

donde:

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \text{función cúbica para un segmento;} \\ x_i &= \text{primer punto del segmento } (i = 1, 2, n); \\ x &= \text{punto de evaluación de la función;} \\ \alpha_i, \beta_i, \chi_i, \delta_i &= \text{coeficientes de la función.} \end{aligned}$$

$S_i(x)$ interpola cualquier punto x que se encuentre dentro del intervalo (x_i, x_{i+1}) , siendo necesario que S_i sea igual a S_{i+1} en el punto x_{i+1} para satisfacer la continuidad de la interpolación en los puntos de unión de las funciones (nodos).

Cada función forma una serie de puntos entre un par de nodos, y el conjunto de funciones queda definido en (A, B) donde $A = x_0 < x_1 < \dots < x_n = B$ como se muestra en la figura 1.

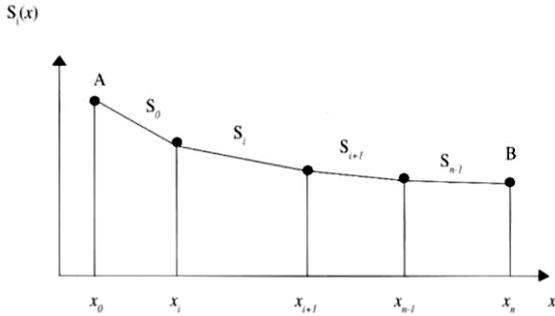


Figura 1. Representación gráfica del ajuste de una función "spline".

Graphical representation of the fitting of a "spline" function.

El conjunto de funciones cúbicas ("spline") para asegurar una continuidad debe cumplir con las siguientes condiciones (Burden *et al.* 1991):

- S es un polinomio cúbico, denotado S_i en el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ para cada $i = 0, 1, \dots, n - 1$;
- $S(x_i) = f(x_i)$ Para cada $i = 0, 1, \dots, n$;
- S tiene la primera y segunda derivada iguales en todos los nodos interiores;
- Se satisface una de las dos siguientes condiciones de frontera:
 - i) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ frontera libre
 - ii) $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ frontera sujeta.

3. ESTIMACION DE PRODUCTOS

La metodología para la aplicación práctica de las funciones "spline" consiste en seccionar cada fuste en varias partes, puntos en los cuales se debe realizar la medición del diámetro y la altura de sección desde la base. De esta manera se obtiene una serie de puntos, cada uno representando una posición en el fuste. Se ha comprobado que se debe medir al menos un mínimo de cuatro puntos en el fuste para obtener estimaciones aceptables (Vidal 1998). Por motivos prácticos los puntos a medir son generalmente el diámetro de tocón (d_t), el diámetro a 1.3 m ($d_{1.3}$), un diámetro superior (d_s) medido a una cierta altura determinada, y el diámetro a la altura de comienzo de copa (d_c), tal como se esquematiza en la figura 2.

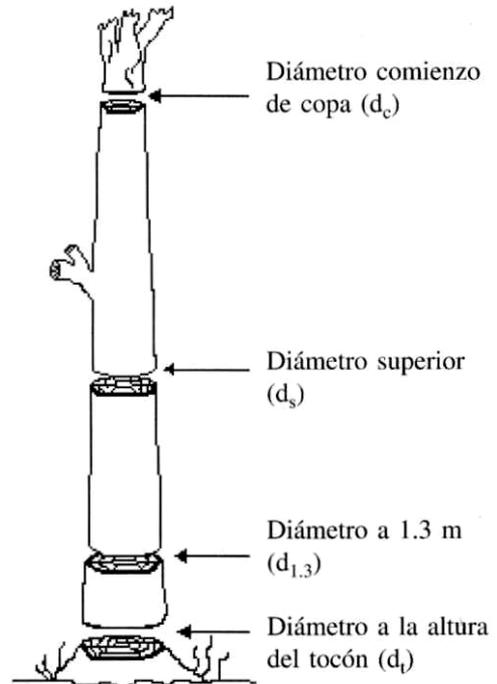


Figura 2. Esquema de la ubicación de los nodos en el fuste.

Representation of node location on stem profile.

El aumento de puntos de medición permite un mejoramiento de la calidad de ajuste del "spline"; sin embargo, es poco probable que esta mejora se justifique económicamente.

La figura 2 representa un fuste dividido en tres secciones, cada una de las cuales está definida por un par de nodos. Se puede constatar que los dos nodos interiores son compartidos por los segmentos adyacentes. Una representación gráfica de la posición de los nodos en el fuste se puede observar en forma esquemática en la figura 3.

En la figura 3a se pueden observar los tres segmentos en que está dividido el fuste y los nodos que los limitan. En cada intervalo se debe ajustar un polinomio cúbico que aproximará la forma del fuste en ese segmento, luego las tres funciones que componen el fuste se unen en cada uno de los nodos en forma continua, pudiéndose estimar cualquier diámetro o altura a lo largo del fuste. En la figura 3b se pueden observar gráficamente la forma que adquiere la curva y la continuidad de ésta en los nodos, al ajustar la función "spline".

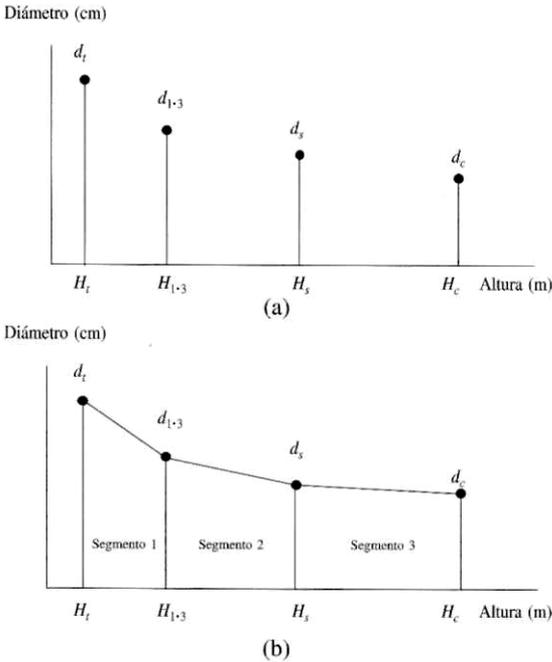


Figura 3. Representación gráfica de los puntos de referencia para ajuste de la función "spline".
Graphical representation of the reference points necessary for "spline" fitting

La estimación del volumen fustal se obtiene resolviendo la integral definida de cada función entre los límites correspondientes al segmento del fuste, aplicando la siguiente fórmula:

$$V_{(h_{i+1}, h_i)} = \frac{\pi}{40000} \int_{h_i}^{h_{i+1}} S_i(x)^2 dh \quad [2]$$

Para obtener el volumen entre dos alturas ($h_{i+1} \geq h_i$):

$$V_{(h_{i+1}, h_i)} = \frac{\pi}{4} \left[\alpha_i(h_{i+1} - h_i) + \frac{\beta_i}{2}(h_{i+1} - h_i)^2 + \frac{\chi_i}{3}(h_{i+1} - h_i)^3 + \frac{\delta_i}{4}(h_{i+1} - h_i)^4 \right] \quad [3]$$

donde:

$V_{(h_{i+1}, h_i)}$ = volumen entre dos límites de un intervalo ($h_{i+1} \geq h_i$);
 $\alpha_i, \beta_i, \chi_i, \delta_i$ = coeficientes de la función.

El volumen total fustal se obtiene de la suma de las funciones integradas para cada uno de los tres intervalos:

$$V_{(H_c, H_1)} = \int_{H_1}^{H_{1.3}} S_1(x)^2 dh + \int_{H_{1.3}}^{H_s} S_2(x)^2 dh + \int_{H_s}^{H_c} S_3(x)^2 dh \quad [4]$$

donde:

$S_i(x)$ = función correspondiente a cada intervalo ($i = 1, 2, 3$);
 $H_1, H_{1.3}, H_s, H_c$ = alturas límite de cada intervalo.

El ajuste de las funciones "spline" y el cálculo de volumen se realiza individualmente para cada árbol, por lo cual es necesaria la implementación de rutinas computacionales, con los algoritmos de cálculo de coeficientes del "spline" (Feldman 1992).

IMPLEMENTACION PRACTICA DEL SISTEMA

Esta técnica fue utilizada en la estimación de volumen comercial en una muestra destructiva de 70 árboles de Lengua (*Nothofagus pumilio*).

En cada árbol se realizaron mediciones de altura y diámetro a la altura de tocón (0.3 m), DAP (1.3 m) y posteriormente cada dos metros hasta la altura de comienzo de copa. Mediante interpolación lineal se determinó el diámetro al 40% de la altura comienzo de copa. Finalmente el volumen total se obtuvo calculando volumen de la primera sección asemejando la forma de un cilindro y las restantes mediante la fórmula de Smalian (Avery y Burkhart 1994).

Para el ajuste de la "spline" se empleó un total de cuatro mediciones a lo largo del fuste, las cuales correspondieron al diámetro de tocón, diámetro a 1.3 m, diámetro al 40% de la altura de comienzo de copa y el diámetro al comienzo de copa viva. A continuación se muestran algunos resultados de error y sesgo probable, los cuales se obtuvieron al calcular para cada una de las clases de alturas relativas los siguientes estadísticos:

Raíz del error medio cuadrático

$$REMC = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_o - y_e)^2 / n}$$

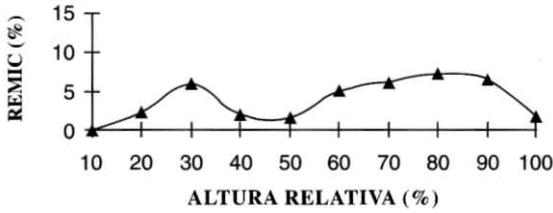
Diferencia agregada

$$DIFA = \sum_{i=1}^n (y_o - y_e) / n$$

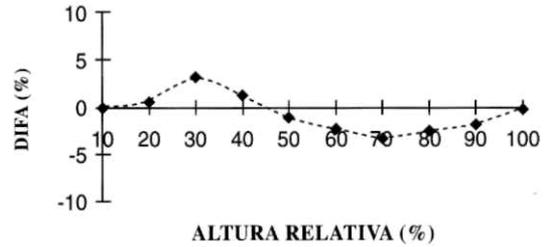
Donde y_o = valor observado, y_e = valor estimado y n = número total de observaciones.

ESTIMACION DE DIAMETROS PARA DIVERSAS ALTURAS

La figura 4 muestra los valores de error (REMC) y sesgo (DIFA) que presenta la "spline" en la estimación de diámetros a partir de alturas reales.



(a)



(b)

Figura 4. Medidas de error y sesgo en la estimación de diámetros a diversas alturas relativas: (a) Raíz del error medio cuadrático (REMC) y (b) Diferencia agregada (DIFA).

Error and bias in diameter estimate at different relative heights: (a) root mean square error (RMSE) and (b) aggregated difference (AD).

A partir de la figura 4a se puede observar que las estimaciones presentan bajos valores de error a la altura del tocón aumentando hasta el 35% de la altura donde alcanza el 6%. En las partes superiores el error disminuye llegando a valores inferiores del 2% en la parte central del fuste. En la parte media superior del fuste los valores del error vuelven a aumentar con un máximo cercano al 7% en el 80% de la altura.

La tendencia general de las funciones "spline" es a subestimar los diámetros en la mitad inferior del fuste y a sobreestimar los diámetros en la parte superior del fuste, tal como se muestra en la figura 4b. La mayor subestimación se presenta en el 30% de la altura, llegando a valores de sesgo cercanos a 4%. A partir del 35% de la altura se tiende a sobreestimar, llegando a valores de sesgo cercanos al 4% en el 70% de la altura.

ESTIMACION DE VOLUMEN ACUMULADO

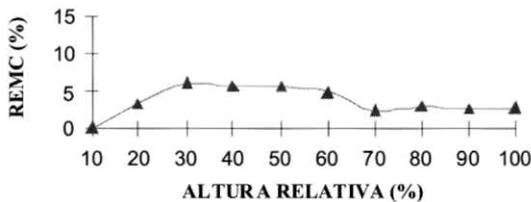
La figura 5 entrega los resultados de error de predicción (REMC) y diferencia agregada (DIFA)

para la estimación de volumen acumulado por secciones del fuste.

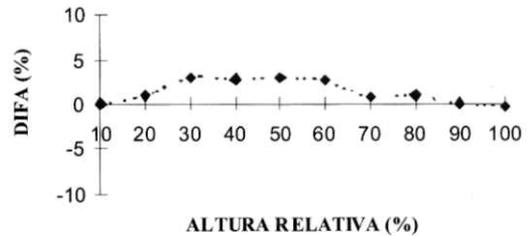
A partir de la figura 5a se observa que los errores más altos se presentan en la parte central del fuste (6%) y los más bajos en la parte superior. Por otro lado, se tienden a subestimar lo largo de todo el fuste, alcanzando valores no mayores al 3% (figura 5b).

5. CONCLUSIONES

Se puede concluir que las funciones "spline" presentan posibilidades de desarrollo como un instrumento para la estimación de variables dasométricas y volúmenes comerciales para árboles en pie. Su mayor complejidad matemática puede ser resuelta por medio de programación computacional, siendo compensada por una mayor precisión en las estimaciones. A su vez las variables de difícil medición por su localización en el fuste (diámetros superiores) pueden ser obtenidas empleando instrumentos ópticos de medición o bien mediante la construcción de modelos predictivos.



(a)



(b)

Figura 5. Medidas de error y sesgo en la estimación de volumen acumulado: (a) Raíz del error medio cuadrático (REMC) y (b) Diferencia agregada (DIFA).

Error and bias in cumulative volume estimate at different relative heights: (a) root mean square error (RMSE) and (b) aggregated difference (AD).

6. BIBLIOGRAFIA

- ATKINSON, L.V., P.J. HARLEY. 1983. *Introducción a los métodos numéricos con Pascal*. 3ª edición, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., 305 p.
- AVERY, T., H. BURKHART. 1994. *Forest measurements*. 4ª edición, McGraw-Hill, 480 p.
- BURDEN, R.L., J.D. FAIRES, A.C. REYNOLDS. 1991. *Análisis numérico*. Boston, Massachusetts, Prindle, Weber y Schmidt, 610 p.
- CHAPRA, S.T., P.C. RAIMOND. 1988. *Métodos numéricos para ingenieros*. 1ª edición, McGraw Hill, 641 p.
- FELDMAN, D. 1992. *Turbo-Pascal-Quellexte zur Ingenieur-Mathematik*. Feldman Verlag, 364 p.
- GOULDING, C. J. 1979. "Cubic 'spline' curves and calculation of volume of sectionally measured trees", *N. Z. J. For. Sci.* 9 (1): 89-99.
- LIU, C.J. 1980. "Log volume estimation with 'spline' approximation", *For. Sci.* 26 (3): 361-369.
- NAGEL, J., S. ATHARI. 1982. Stammanalyse und Ihre Durchführung. *Allg. Forst, u. J.-Zig.* 179-182.
- SABOROWSKI, J., B. SLOBODA, A.JUNGE. 1981. Darstellung von Schaftformen durch kubische "spline"-Interpolation und Reduktion der Stützstellenanzahl. *Forstarchiv.* 127-130.
- SHEID, F. 1991. *Métodos numéricos*. 2ª edición, México, Mc Graw Hill, 709 p.
- VIDAL, J. 1998. Construcción de funciones "spline" y funciones de ahusamiento para Lenga (*Nothofagus pumilio*). Universidad Austral de Chile, Facultad de Cs. Forestales, Tesis de Grado, 71 p.