Estudios Pedagógicos XLVIII, N° 2: 9-34, 2022
DOI: 10.4067/S0718-07052022000200009

INVESTIGACIONES

Resolución de tipos de problemas contextualizados y análisis de errores: un estudio de casos

Problem solving types contextualized and error analysis: A case study

Verónica Díaz Quezada[a], *George Flores del Río*[a]

[a] Universidad de Los Lagos, Chile.
mvdiaz@ulagos.cl, george.flores@ulagos.cl

RESUMEN

El artículo tiene como objetivo determinar el rendimiento académico y errores en la resolución de tipos de problemas de aplicación de la función cuadrática, de estudiantes de enseñanza media de la Región de Los Lagos y de la Región de Los Ríos en Chile. El enfoque es cualitativo descriptivo con estudio de casos. Fueron elaboradas y aplicadas una prueba de matemática con problemas de respuesta abierta y un cuestionario de opinión. A través de los resultados, se evidencia el mayor rendimiento académico en los problemas rutinarios de contexto puramente matemático y de contexto fantasista, pero con dificultad en la resolución de problemas no rutinarios. Además, los errores con origen en las actitudes afectivas y emocionales asociados a bloqueos al iniciar la resolución, olvido a la hora de plantear la función cuadrática, prevalecen por sobre los errores con origen en un obstáculo y errores con origen en la ausencia del sentido.

Palabras clave: resolución de problemas, rendimiento académico, función cuadrática, enseñanza media.

ABSTRACT

The article aims to determine the academic performance and errors in solving types of problems of application of the quadratic function of high school students from the Los Lagos region and the Los Ríos region in Chile. The approach is qualitative descriptive with case studies. A mathematics test with open response problems and opinion questionnaire were developed and applied. Through the results, the highest academic performance in routine problems of purely mathematical context and fantasy context is evidenced, but with difficulty in solving non-routine problems. Furthermore, errors originating from affective and emotional attitudes associated with blockages when initiating resolution, forgetfulness when considering the quadratic function, prevail over errors originating from an obstacle and errors originating from absence of sense.

Key words: problem solving, academic performance, quadratic function, secondary education.

Recibido: 04/02/2021
Aceptado: 28/07/2021

1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo con la reforma vigente en Chile, en la unidad de Álgebra y Funciones de la enseñanza media o secundaria, los alumnos comienzan con el reconocimiento de funciones y su distinción con las relaciones en contextos diversos. En esta unidad, según el Ministerio de Educación en Chile (MINEDUC) se posibilita identificar tópicos relativos a los tipos de funciones, particularmente, la función cuadrática cuya enseñanza y aprendizaje está ligada curricularmente al segundo año de educación media (MINEDUC, 2019). Sin embargo, se producen desfases en el nivel real de su enseñanza, dependiendo del tipo de establecimiento educacional, que puede ser municipal, particular subvencionado o particular pagado (Díaz & Poblete, 2018). Por otra parte, existe coincidencia en las investigaciones recientes, respecto a la dificultad que presenta para los estudiantes el aprendizaje de la función cuadrática (Ruli *et al*., 2018; Celik & Güzel, 2019), las cuales tienen su origen no sólo en el dominio cognitivo, sino también en el dominio afectivo. Se han propuesto investigaciones en el dominio cognitivo sobre la función cuadrática que se relacionan con los registros de representaciones semióticas y entornos tecnológicos (Peralta-García *et al*., 2019; Bajaña, 2019; Özaltun & Bukova, 2019; Aros, 2018; Farez, 2018; Esquer *et al*., 2015; Gomez-Blancarte *et al*., 2017; Huapaya, 2012). Son menos habituales los estudios sobre función cuadrática y resolución de problemas.

En el dominio afectivo, también es poco frecuente encontrar estudios sobre los afectos de un estudiante y la resolución de problemas. Pero si existen variados estudios sobre la relación entre la actitud del profesor y el rendimiento académico de los estudiantes en matemáticas (Fulgar, 2020; Good & Lavigne, 2018; Beilock *et al*., 2017; Haciomeroglu, 2013; Mensah *et al*., 2013; Chapman, 2013; Sloan, 2010). También se ha investigado la importancia de las actitudes en el rendimiento de los estudiantes en matemáticas (Peteros *et al*., 2019; Langat, 2015; Tapia & Marsh, 2005) concluyendo que las actitudes hacia las matemáticas tienen un impacto significativo en el rendimiento de los alumnos.

Para los autores Blanco *et al*. (2013), la relación entre las emociones y el rendimiento en matemática se hace visible en el alumno, cuando necesita comprender la estructura o necesita recuperar la información de una tarea matemática específica, en los momentos en que diseña una estrategia para resolver un problema que requiere el recuerdo de fórmulas o procedimientos rutinarios, o en los procesos de autorregulación de su aprendizaje unido a una metodología de enseñanza de la matemática que rechaza (Díaz *et al*., 2018). Todas estas situaciones son generadoras de errores y/o dificultades que constituyen obstáculos en el aprendizaje de la matemática. En la actualidad se enfatiza la necesidad de desarrollar habilidades para la resolución de problemas y desarrollo de habilidades creativas en matemáticas (Díaz & Poblete, 2018), pero también se enfatiza la necesidad de reconocer y anticiparse a los errores (MINEDUC, 2015) que forman parte de las producciones de la mayoría de los alumnos, constituyéndose en un elemento estable en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en todos los niveles del sistema educativo.

Las bases curriculares del MINEDUC (2019), para estudiantes de educación media, nuevamente plantean como objetivo central, construir el aprendizaje de los estudiantes basado en habilidades y contenidos. Para ello, el estudiante debe lograr resolver problemas, tomar decisiones, aplicar y construir modelos matemáticos fundamentando las decisiones. Sin embargo, los resultados en las evaluaciones internacionales en las que Chile ha participado dan cuenta de no haberse logrado completamente estos objetivos (Agencia de Calidad de la Educación, 2018). En la última evaluación PISA 2018, analizada las competencias de los estudiantes de 15 años de 80 países, Chile se posesionó con el mejor rendimiento en matemática entre los 10 países latinoamericanos que participaron de esta evaluación, sin embargo, está 46 puntos abajo del promedio de la OECD y sin avances en matemática desde su última evaluación en PISA 2015 (OECD, 2019). Además, las brechas entre los estudiantes están asociadas, como en la mayoría de los países, al nivel socioeconómico y cultural como variable fuertemente ligada a los resultados en las tres áreas evaluadas (lectura, matemática y ciencias naturales). En la evaluación TIMSS 2015, comparativamente con Rusia por similitud en el PIB per cápita, con Irán y Tailandia, por tener rendimientos similares en los mismos años de evaluación en matemática, Chile es el país que presenta una tendencia más consistente hacia la mejora en el rendimiento TIMSS Matemática de 8°año, sin embargo, en el dominio de conocimiento, todos estos países considerados –excepto Chile– presentan aumentos en sus puntajes promedios de TIMSS 2015 en comparación con 2011 (Agencia de la Calidad, 2017), lo cual indica que, a nivel general, existe una mejora en matemática en octavo básico, pero al mismo tiempo, existe un grupo creciente de estudiantes que están quedando rezagados respecto a los conocimientos y habilidades mínimas que se esperan en esta asignatura y grado. Considerando los 47 países participantes, entre el 15% y el 37% de los estudiantes en Chile, no alcanzan el umbral mínimo asociado al nivel de desempeño bajo en matemática (en comparación con 5% y 16% a nivel internacional, respectivamente), en promedio, solo el 1% de los estudiantes del país alcanza el nivel de desempeño avanzado. La evaluación eTIMSS 2019 aun no presenta los resultados.

A nivel nacional, la Agencia de Calidad de la Educación (2018) reportó que, si bien los resultados en matemática en segundo año medio se han mantenido estables respecto a la medición del 2012, estos bajaron en dos puntos respecto a los años 2016 y 2017. En particular, en las regiones de los Ríos y los Lagos, los resultados nacionales evidenciaron que en matemática la Región de Los Lagos bajó 1 punto respecto a la medición del año anterior y está 4 puntos bajo la media nacional. En tanto que la Región de Los Ríos bajó 2 puntos respecto a la medición del año anterior y está 10 puntos bajo la media nacional. En promedio, el 48% de los estudiantes de estas regiones alcanzan el Nivel Insuficiente de rendimiento en matemática, siendo éste significativamente inferior al promedio nacional (Agencia de la Calidad de la Educación, 2018).

Tanto en las evaluaciones internacionales como nacionales recientemente indicadas, se incluye la resolución de problemas que son propios de la disciplina o de la vida cotidiana. En particular el MINEDUC (2019), señala la importancia de profundizar en problemas rutinarios y no rutinarios, como una oportunidad de aprendizaje clave de la matemática. La resolución de problemas desde mediados del siglo XX ha sido el tema central de muchas investigaciones, pero también de importantes dificultades asociadas a ella (Hernández *et al*., 2019), las cuales se evidencian a partir de los errores que los estudiantes cometen cuando resuelven problemas.

En este contexto, surge el objetivo de investigación que es determinar el rendimiento académico y los errores que presentan en la resolución de tipos de problemas de aplicación de la función cuadrática, estudiantes de tercer año medio de las regiones de Los Lagos y de Los Ríos.

2. MARCO TEÓRICO

La resolución de problemas es una de las habilidades principales en el plan de estudios de matemáticas que requiere que los estudiantes apliquen e integren muchos conceptos y habilidades matemáticas, así como tomar decisiones (Jäder *et al*., 2019; Davis *et al*., 2014; Boesen *et al*., 2010; Henderson, 2012; Schoenfeld, 2012; Kilpatrick *et al*., 2001; Niss, 2003; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), también se le considera un componente central del razonamiento matemático (MINEDUC, 2019) que requiere habilidades de pensamiento de nivel superior y que por tanto necesita la incorporación de problemas rutinarios y no rutinarios para el estudiante.

Como la resolución de problemas matemáticos juega un papel tan crítico en el plan de estudios, es imperativo que los estudiantes obtengan dominio de esta habilidad. Sin embargo, las investigaciones recurrentemente en diferentes latitudes indican que los estudiantes tienen dificultades en su dominio (Tambychika *et al*., 2010; Fuadi *et al*., 2017; Peranginangin, 2017; OECD, 2014) que se refleja en el bajo desempeño en pruebas de rendimiento estandarizadas.

Por otra parte, durante décadas la pedagogía de la Educación Matemática se ha basado principalmente en que los profesores demuestren problemas de ejemplos correctamente trabajados, como modelos para que los estudiantes repliquen mientras practican sus propios problemas (Rushton, 2018; Atkinson *et al*., 2003). Dado que la resolución de problemas es también una herramienta poderosa y efectiva para el aprendizaje, el mejor aprovechamiento de esta habilidad se logra cuando se le permite al estudiante poder resolver problemas en una amplia gama de temas en ciencia, tecnología, negocios, finanzas, medicina y de la vida cotidiana (Akyüz, 2020) y en diversos contextos que permitan aplicaciones de los objetos matemáticos.

2.1. TIPOS DE PROBLEMAS

La clasificación de tipos de problemas de los autores Díaz y Poblete (2001) forman parte del marco teórico (Figura 1). Se consideran tipos de problemas según su naturaleza y contexto.

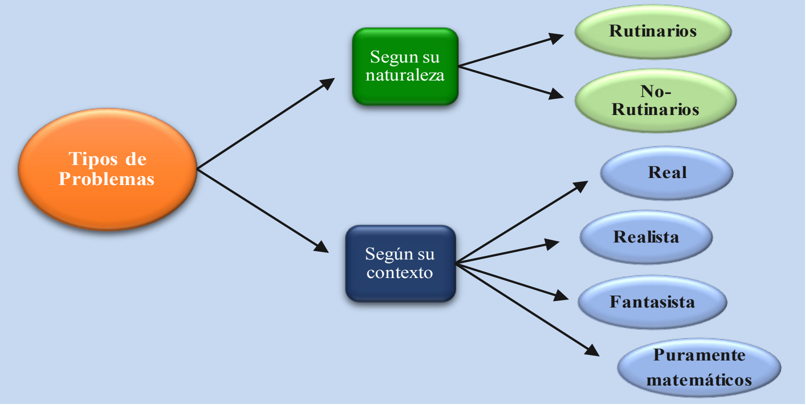


Figura 1. Clasificación de tipos de problemas.
Fuente (Díaz y Poblete, 2001).

2.1.1. Problemas rutinarios

Incluyen plantear, formular y resolver tipos de problemas de contexto real, realista, fantasista y puramente matemáticos, que requieren el establecimiento de conexiones para su resolución. Los problemas rutinarios son similares a los resueltos durante los cursos de instrucción; el estudiante sigue una secuencia que implica entender los conceptos y algoritmos para alcanzar soluciones válidas.

- Problema de contexto real: Un contexto es real si se produce efectivamente en la realidad y compromete el accionar del alumno en la misma.
- Problema de contexto realista: Un contexto es realista si es susceptible de producirse realmente. Se trata de una simulación de la realidad o de una parte de la realidad.
- Problema de contexto fantasista: Un contexto es fantasista si es fruto de la imaginación y está sin fundamento en la realidad.
- Problema de contexto puramente matemático: Un contexto es puramente matemático si hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos: números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc.

2.1.2. Problemas no rutinarios

Un problema será No Rutinario cuando un estudiante no conoce una respuesta ni un procedimiento previamente establecido o rutina, para encontrarla. Los problemas no rutinarios, también pueden ser clasificados según el contexto.

Para Altun (2003) los problemas no rutinarios son aquellos que requieren diferentes habilidades como organizar y clasificar datos, descubrir las relaciones, determinar las reglas y generalidades. El contexto de los problemas puede variar desde experiencias que son familiares a los estudiantes hasta problemas más complejos como los no rutinarios. A los docentes les corresponde representar el importante papel de elegir problemas que sean significativos para los estudiantes, pues su resolución debe ser útil para ayudarlos en el dominio de contenidos.

2.2. FUNCIÓN CUADRÁTICA

En general, se acepta que las matemáticas ayudan a organizar y ordenar el pensamiento, promueve habilidades de orden superior que permiten la resolución de problemas, sin embargo, a pesar de estos puntos destacables, la mayoría de los alumnos tienen dificultades y muestran deficiencias en el aprendizaje de las matemáticas. Un área de recurrente dificultad es el álgebra, que está vinculada a funciones, en cuanto modelan una relación dependiente entre una cantidad y otra. Para el NCTM (2020) juntos, el álgebra y las funciones constituyen el lenguaje de generalización que permite la representación sistemática de patrones y relaciones entre números y objetos, analizando el cambio y modelando situaciones del mundo real (NCTM, 2018). Sin embargo, hay muchas preguntas sobre el aprendizaje de las funciones cuadráticas que aún quedan sin respuesta.

El concepto de función cuadrática es una de las ideas más importantes en las matemáticas escolares, ya que los gráficos y las ecuaciones son partes importantes de las matemáticas (Benning & Agyei, 2016; Nielsen, 2015; Parent, 2015). La idea de la función cuadrática juega un papel clave en el desarrollo de conceptos matemáticos, ya que atraviesa una gama de dominios de contenido matemático, incluidos los de álgebra y geometría (NCTM, 2000).

Por otra parte, la comprensión de los profesores de matemáticas de las funciones cuadráticas es crítica para el éxito de los estudiantes en matemáticas y parece haber acuerdo en que para muchos estudiantes de secundaria, resolver y comprender las funciones cuadráticas puede ser un desafío conceptual, debido a la necesidad de hacer conexiones entre varias representaciones de la función, así como las conexiones entre las diversas formas en que la ecuación cuadrática se puede expresar (Didis *et al*., 2011; Kilic, 2011).

La investigación sobre las funciones cuadráticas de enseñanza y aprendizaje (Didis *et al*., 2011; Ellis & Grinstead, 2008; Eraslan, 2008; Metcalf, 2007; Strickland, 2011; Vaiyavutjamai *et al*., 2005; Zaslavsky, 1997) ha involucrado a los estudiantes después de su aprendizaje de funciones específicas. Uno de estos estudios de función cuadrática la realizó Metcalf (2007) con tres estudiantes de pregrado en una Universidad de Nueva Inglaterra. Encontró que uno de sus participantes podía realizar varios procedimientos, pero mostró una comprensión relacional limitada de los conceptos. Desafortunadamente, ninguno de sus participantes mostró mucha flexibilidad para moverse entre representaciones. Además de esto, todos exhibieron dificultades con la comunicación en relación con la función cuadrática.

Aunque no se limitan a estos ejemplos, las funciones cuadráticas se relacionan con el pensamiento matemático y el razonamiento en el mundo real debido, por ejemplo, a su participación en la descripción del recorrido de los proyectiles (Brown *et al*., 2007; Center, 2012), apareciendo en puentes colgantes, siendo la sección transversal de faros de automóviles, antenas parabólicas y radiotelescopios (Brown *et al*., 2007), utilizados además, por los militares al predecir dónde los proyectiles de artillería tocarán la tierra (Center, 2012), para describir las órbitas a lo largo de las cuales se mueven los planetas y el vínculo entre las ecuaciones cuadráticas y la aceleración (Budd & Sangwin, 2004).

Kotsopoulos (2007) señala tres formas de la función cuadrática que son la forma estándar, la forma factorizada y la forma del vértice. Los estudiantes se confunden cuando los conceptos de función cuadrática se presentan de diferentes formas a las que no están acostumbrados. Mutambara *et al*. (2020) realizaron una exploración de la comprensión de los maestros en servicio del concepto de función cuadrática. El estudio adoptó el APOS (action-process-object-schema) para investigar su comprensión conceptual de los conceptos. Los hallazgos del estudio revelaron que la mayoría de los maestros de pre-servicio parecía estar operando en el nivel de comprensión de la acción, con muy pocos maestros que han alcanzado el nivel de objeto. Se observó que la descomposición genética preliminar no pudo acomodar las respuestas de todos los participantes, lo que condujo al desarrollo de una descomposición genética modificada. Los investigadores López *et al*. (2015) indicaron que los estudiantes que conocían algunas reglas relacionadas con la resolución de funciones cuadráticas podían aplicar estas reglas sin pensar por qué lo hicieron, o si lo que estaban haciendo era matemáticamente lo correcto.

Los estudios recientemente expuestos, evidenciaron que alumnos y maestros en servicio, presentan una variedad de dificultades relativa a la función cuadrática. Obstáculos que en los procesos de enseñanza y aprendizaje son potencialmente generadoras de errores. Autores como Radatz (1980), Movshovitz–Hadar *et al*. (1987), Rico (1995), Socas (1997), Cervantes y Martínez (2007), han establecido clasificaciones de errores en matemática.

2.2.1. Tipos de errores

Dado que los errores son inherentes a la vida humana, la presencia de ellos en la adquisición y en el desarrollo del conocimiento en matemática, es una constante a lo largo de toda la historia de la disciplina. La primera conceptualización de los errores en Educación Matemática fue presentada por Brousseau (1976), reconociendo tres tipos: errores ontogenéticos, errores epistemológicos y errores didácticos. Con el transcurso del tiempo, se cambió el término ontogenético, por cognitivo, que luego fue cambiado a psicológico.

En años más recientes, se han introducido problemas incorrectos para el análisis de errores realizado por los estudiantes (McLaren *et al*., 2015). Para Rushton (2018) las realizaciones de análisis de errores están alineados con los estándares de la práctica matemática y las prácticas de enseñanza de las matemáticas (NCTM, 2014). Los investigadores plantean un resultado de una mayor comprensión matemática cuando estas prácticas se utilizan con una combinación de problemas trabajados correcta y erróneamente (Adams *et al*., 2014; Durkin & Rittle-Johnson, 2012; Große & Renkl, 2007; Loibl & Rummel, 2014; McLaren *et al*., 2012; NCTM, 2014; National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School, 2010; Sisman & Aksu, 2015).

El MINEDUC (2019) reconoce que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje en matemática. Autores como Oser y Spychiger (2005), Heinze y Reiss (2007) postulan que los errores son necesarios para elaborar la idea individual sobre lo que es falso y lo que es correcto. Pero cabe preguntarse ¿con qué frecuencia los estudiantes consideran que sus errores son signos de fracaso?, ¿cuántos estudiantes, así como padres o apoderados, creen que el objetivo de aprender matemáticas es obtener la respuesta correcta únicamente? A menudo, los docentes se resisten a la idea de utilizar el análisis de errores en sus aulas. Algunos creen que analizarlos lleva demasiado tiempo (Tsovaltzi *et al*., 2010). De acuerdo con McLaren *et al*. (2012) el análisis de errores es una estrategia de instrucción que ayuda a los estudiantes a retener su aprendizaje. Pero previo a ellos, es fundamental conocer los tipos de errores en los que pueden incurrir los estudiantes, cuando resuelven un problema matemático.

Para efectos del marco teórico de esta investigación, se considera la clasificación de errores propuesta por Socas (1997) que asocia los dominios cognitivo y afectivo, y reconoce tres categorías.

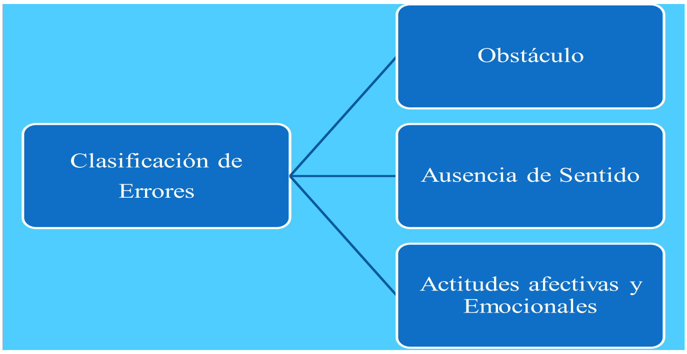


Figura 2. Clasificación de errores.
Fuente (Socas, 1997).

- *Errores que tienen su origen en un obstáculo*: Se considera al obstáculo como un conocimiento adquirido, no como una falta de conocimiento, que fue efectivo en algún contexto especifico pero que cuando el alumno utiliza dicho conocimiento en otro contexto, da lugar a respuestas inadecuadas.
- *Errores que tienen su origen en la ausencia del sentido*: Estos pueden dividirse en tres clases:
  [1] Errores que tienen su origen en la aritmética, como resultado de no haber asimilado relaciones y procesos en un contexto aritmético,
  [2] Errores de procedimiento, es decir, se producen cuando los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas, definiciones o reglas,
  [3] Errores debidos a la mala interpretación del leguaje matemático.
- *Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales*: Estos errores derivan de la falta de concentración, bloqueos, olvidos, etc.

Para muchos estudiantes y maestros, los errores están asociados con sentimientos negativos. Según la Asociación Americana de Psicología, los sentimientos que afectan el estado de ánimo y la reacción emocional de una persona pueden denominarse afecto, y la actitud hacia las matemáticas es un ejemplo de un estado afectivo (Berger *et al*., 2020).

Para Fulgar (2020) la actitud en general se refiere a la forma de pensar, actuar y comportarse de una persona. Tiene una implicación muy relevante para el estudiante, el profesor, el grupo social inmediato y todo el sistema escolar (Mensah *et al*., 2013). Las actitudes pueden afectar el comportamiento que influye en lo que el alumno selecciona del entorno, cómo reaccionará ante los profesores, hacia el material que se utiliza y también hacia otros estudiantes.

Cuando a los estudiantes se les proponen problemas no rutinarios de Matemáticas, según Díaz *et al*. (2018), sus reacciones a menudo incluyen mucho de emoción y si el tiempo de resolución del problema es extenso, las respuestas emocionales pueden llegar incluso a ser muy intensas.

3. METODOLOGÍA

Este estudio en su totalidad corresponde a una investigación descriptiva con metodología mixta, aplicada a una muestra de 275 estudiantes de cuatro liceos de dos regiones de Chile. Para efectos de este artículo, se presenta el estudio cualitativo con estudio de casos (Hernández *et al*., 2010), con la finalidad de estudiar de manera detallada, comprehensiva y en profundidad, el rendimiento académico y los errores puntuales que presentan los estudiantes en la resolución de tipos de problemas de aplicación sobre función cuadrática.

Se analizan cuatro estudiantes de tercer año de enseñanza secundaria seleccionados por disponibilidad y pertenecientes a dos establecimientos educacionales de la región de Los Lagos y dos de la región de Los Ríos. En adelante los estudiantes se denominan por la palabra caso y se enumeran del 1 al 4.

Específicamente, el caso 1 corresponde a un estudiante de un establecimiento educacional municipal de la Región de Los Lagos; caso 2, de un establecimiento educacional municipal de la Región de Los Ríos; caso 3, perteneciente a un establecimiento educacional particular subvencionado de la Región de Los Lagos; caso 4, establecimiento educacional particular subvencionado de la Región de Los Ríos.

3.1. INSTRUMENTOS

Para describir y analizar el rendimiento académico y los errores con origen en un obstáculo y con ausencia de sentido de los estudiantes en la resolución de problemas, se elabora y aplica una prueba de resolución de 11 problemas contextualizados a la función cuadrática y de respuesta abierta, que fue previamente validada por contenido y mediante el juicio de diez expertos en resolución de problemas en matemática (Skjong & Wentworth, 2001), considerando un 85% de congruencia entre sus respuestas, para aceptar como válido el tipo de problema que finalmente conforma la prueba de matemática, que inicialmente tenía 15 problemas (Hyrkäs *et al*., 2003). También se verificó la validez de constructo por análisis factorial, la homogeneidad de la muestra a través de la prueba no paramétrica de U de Mann Whitney. Se comprobó la consistencia interna del instrumento, mediante el coeficiente alfa de Cronbach que resultó igual a 0,79. Se realizó un análisis detallado de los problemas incluyendo la dificultad y la discriminación de cada uno. La dificultad promedio fue 0,41 y la discriminación promedio 0,49.

Para describir el tipo de error que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales, se requirió la elaboración de un cuestionario de opinión basado en una escala de Likert, de tipo aditiva y ordinal con cuatro instancias de respuesta. El cuestionario tenía como objetivo medir la percepción de los estudiantes frente a la resolución de problemas. Fue previamente validado por contenido, mediante el juicio de 8 expertos en el dominio afectivo y con un grado de congruencia de 85% entre ellos para considerar válida la proposición, quedando conformado por 23 proposiciones y cinco dimensiones: bloqueo, la falta de motivación, falta de concentración (excesiva confianza), olvidos, omisión asociada a su disposición para la matemática. Se calculó la confiabilidad del cuestionario con el alfa de Cronbach, que resultó igual a 0,84.

El resultado obtenido en la prueba de matemática determinó el rendimiento académico de los estudiantes sujetos a estudio. Para su resolución, dispusieron de 2 horas y 30 minutos y fueron aplicadas en diciembre del 2019 en sus respectivos establecimientos educacionales. La distribución de los problemas de la prueba, según la clasificación de tipos de problemas matemáticos (Díaz y Poblete, 2001) fue la siguiente: Problema 1 (P1) rutinario de contexto realista, P2 rutinario de contexto realista, P3 rutinario de contexto fantasista, P4 no rutinario, P5 rutinario de contexto realista, P6 rutinario de contexto fantasista, P7 rutinario de contexto realista, P8 rutinario de contexto puramente matemático, P9 rutinario de contexto puramente matemático, P10 rutinario de contexto fantasista y P11 no rutinario.

Se determinó el rendimiento académico de los estudiantes, utilizando el Modelo de Rash (1980, adaptado por Díaz & Poblete, 2019). Este modelo se asocia con una escala de cinco puntos, los cuales indican el nivel de progreso hacia la solución correcta del problema. La escala de puntajes registra cada detalle en el intento en encontrar la solución (Tabla 1).

Tabla 1. Escala de puntaje

Puntaje	***Etapas de la solución***
0	*No comienzo* El estudiante es incapaz de comenzar el problema o entrega un trabajo que no tiene significado alguno.
1	*Enfoque* El estudiante enfoca el problema con un trabajo significativo, indicando una comprensión del problema, pero encuentra rápidamente una dificultad.
2	*Substancia* Suficientes detalles demuestran que el estudiante se ha orientado hacia una solución racional, pero errores importantes o interpretaciones erróneas impiden el proceso de resolución correcta.
3	*Resultado* El problema está casi resuelto, algunos pequeños errores conducen a una solución final errada.
4	*Completación* Un método apropiado ha sido utilizado y ha producido una solución correcta.

Para describir los errores evidenciados, se utiliza el modelo de clasificación propuesto por Socas (1997) que incluye errores que tienen su origen en un obstáculo, en la ausencia del sentido y en actitudes afectivas y emocionales.

Para las actitudes afectivas y emocionales, inmediatamente después de finalizada la prueba de función cuadrática, se aplica a los casos de estudio, el cuestionario de opinión sobre la resolución de los problemas.

4. RESULTADOS

De los resultados en relación con el tipo de problema contextualizado a la función cuadrática y asociado al desempeño académico, podemos indicar que, los de mayor rendimiento en todos los casos de estudio, fueron los rutinarios de contexto puramente matemático seguidos con una menor frecuencia de los problemas rutinarios de contexto fantasista. Con clara dificultad en los problemas no rutinarios.

A efectos de mostrar el análisis sobre la clasificación de errores y rendimiento académico por cada caso de estudio, se presentan ejemplos de su resolución en la prueba.

A continuación, se presenta el problema 10 de contexto fantasista, dado que es el contexto mayor abordado por los casos de estudio y con mayor resolución correcta, aun cuando corresponden a problemas que son fruto de la imaginación y no tienen fundamento en la realidad, pero han sido elaborados para aplicar la función cuadrática como objeto matemático de estudio.

Problema 10: La función $s(t) = -3t^2 + 36t$, describe el salto de un grillo de manera que s indica la altura en centímetros que alcanza el grillo a los segundos.
¿Qué altura alcanza el grillo a los 2 segundos?
¿Qué altura alcanza el grillo a los 5 segundos?
¿Cuánto tiempo dura el grillo en volver a tocar el suelo?
¿Cuánto tiempo dura el grillo en alcanzar su altura máxima?
¿Cuál es la altura máxima que alcanza el grillo?

Figura 3. Problema rutinario de contexto fantasista.
Fuente. Datos de la investigación.

Se presentan el rendimiento académico evidenciado en cada uno de los cuatro casos de estudio (Figura 4) y los errores según su origen registrados en este problema (Figura 5).

Figura 4. Rendimiento académico en problema rutinario de contexto fantasista.
Fuente. Datos de la investigación.

De acuerdo con la Figura 4, sólo el caso 2 no logra comenzar el problema y no registra procedimiento matemático alguno. En tanto que, de los tres casos de estudio restantes, dos completaron adecuadamente cuatro de las cinco preguntas del problema, pero no lograron determinar la altura máxima que alcanza el grillo. Cabe hacer notar, que la utilidad del vértice de la función y su relación con el mínimo o máximo, y el tiempo de su ocurrencia, es desconocido por al menos 3 de los 4 casos de estudio.

El caso 3 logró llegar a la etapa de completación con cinco respuestas correctas asociadas a la función cuadrática. Los tipos de errores se presentan en la Figura 5.

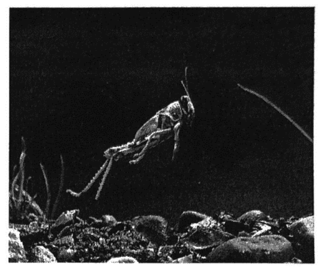
Figura 5. Errores según su origen en problema rutinario de contexto fantasista.
Fuente. Datos de la investigación.

La aplicación del cuestionario de opinión a los casos de estudio permitió verificar que el estudiante correspondiente al caso 2, situó su respuesta en problemas motivacionales asociado al bloqueo en la resolución del problema fantasista.

A continuación, en la Figura 6 se presenta la resolución del problema 10 por el caso 3, el cual llegó a la solución correcta del problema planteado.

10) La función $s(t) = -3t^2 + 36t$, describe el salto de un grillo de manera que s indica la altura en centímetros que alcanza el grillo a los t segundos.

a) ¿Qué altura alcanza el grillo a los 2 segundos?
b) ¿Qué altura alcanza el grillo a los 5 segundos?
c) ¿Cuánto tiempo dura el grillo en volver a tocar el suelo?
d) ¿Cuánto tiempo dura el grillo en alcanzar su altura máxima?
e) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el grillo?



cm
$s(t) = -3t^2 + 36t$

a) $s(2) = -3(2)^2 + 36 \cdot 2$
$s(2) = -3 \cdot 4 + 72$
$s(2) = -12 + 72$
$\boxed{s(2) = 60}$

Alcanza una altura de 60 cm.

b) $s(5) = -3 \cdot 5^2 + 36 \cdot 5$
$s(5) = -3 \cdot 25 + 180$
$s(5) = -75 + 180$
$\boxed{s(5) = 105}$

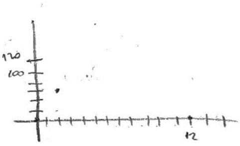
$180 - 75 = 105$

Alcanza una altura de 105 cm.

c) $s(t) = -3t^2 + 36t$
$0 = -3t^2 + 36t$
$3t^{\cancel{2}} = 36\cancel{t}$
$3t = 36$
$\boxed{t = 12}$

Dura 12 segundos en volver a tocar el suelo.

d)



$12/2 = 6$

Demora 6 segundos.

e) $s(6) = -3 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6$
$s(6) = -3 \cdot 36 + 216$
$s(6) = -108 + 216$
$\boxed{s(6) = 108}$

$216 - 108 = 108$

La altura máxima que alcanza el grillo es de 108 cm.

Figura 6. Respuesta del caso 3 al problema rutinario de contexto fantasista.

Fuente. Datos de la investigación.

Otro de los contextos de mejor desempeño, corresponde a los puramente matemáticos. El problema 9 (P9) es según su naturaleza rutinario de contexto puramente matemático, es decir, hace referencia exclusiva a objetos matemáticos, números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc. En este problema se solicita la intersección de la parábola en el eje y.

Problema 9: Dada la función cuadrática: $f\ (x) = x^2 - x + 10$. ¿Cuál es el punto de intersección de la gráfica con el eje ?

A continuación, en las Figuras 7 y 8 se presentan las etapas de resolución del problema y los errores según su origen, respectivamente.

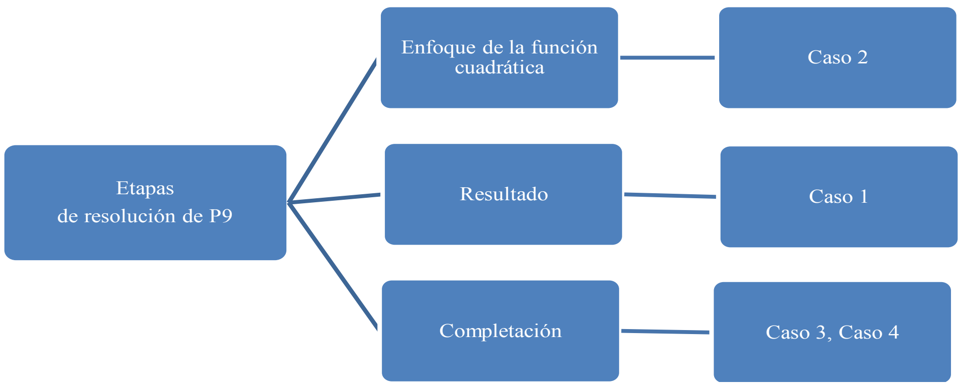


Figura 7. Rendimiento académico en problema rutinario de contexto puramente matemático.
Fuente. Datos de la investigación.

Basados en el esquema de la Figura 7, el rendimiento académico en general es alto en este problema. En un análisis por estudiantes, se tiene que los casos 3 y 4 logran la resolución completa del problema rutinario de contexto puramente matemático. El caso 1 si bien tuvo dificultades en el procedimiento de resolución en la ecuación cuadrática, indica comprensión de cómo se resuelve un problema que hace referencia a relaciones y operaciones algebraicas, las cuales han sido previamente conocidas por los estudiantes en la praxis escolar, pero encontró dificultad en la operatividad de la ecuación y su cálculo, llegando a resultados erróneos por sustitución.

El caso 2 avanzó sólo hasta la etapa de enfoque de la función cuadrática, encontrando una dificultad en el concepto de vértice, que permite encontrar los puntos de la curva donde la función alcanza su máximo y el tiempo en que ocurre. Con respecto al origen de los errores, estos se esquematizan en la Figura 8.

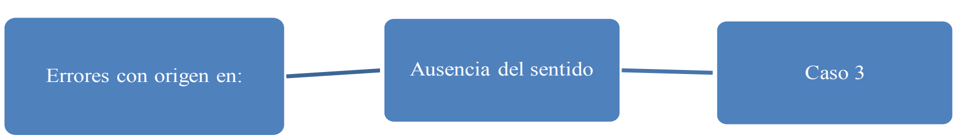


Figura 8. Errores según su origen en problema rutinario de contexto puramente matemático.
Fuente. Datos de la investigación.

Analizados los errores según su origen, se pudo constatar que estos se registran sólo en el caso 3 y corresponden a errores en la ausencia del sentido en el procedimiento, con uso de manera inapropiada del trabajo aritmético en la fórmula de la función cuadrática.

A continuación, se presenta el caso 2 en el desarrollo del P9 rutinario de contexto puramente matemático (Figura 9).

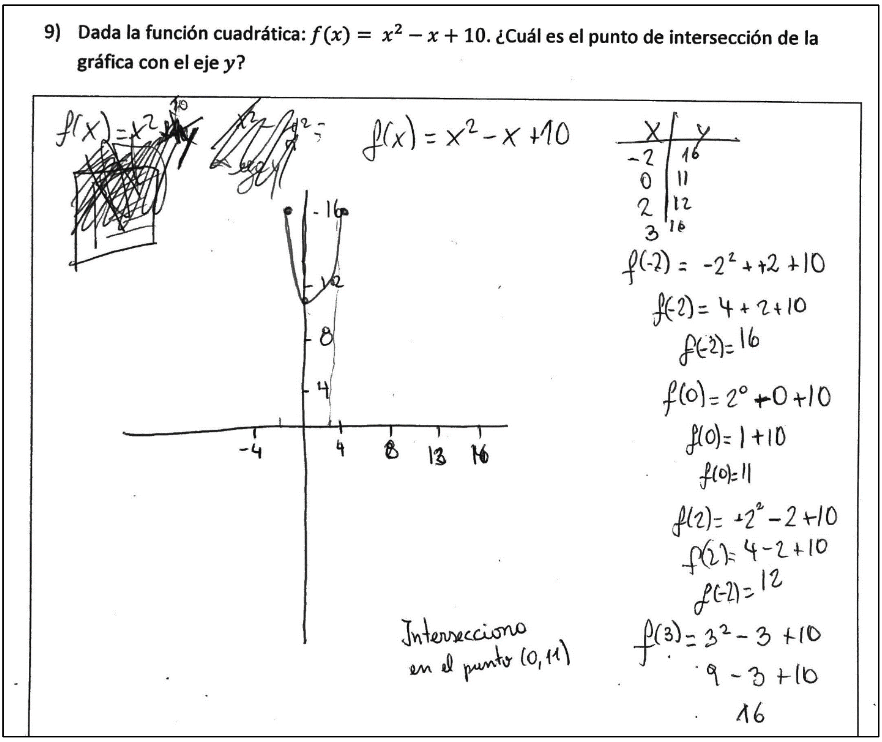


Figura 9. Respuesta del caso 2 al problema rutinario de contexto puramente matemático.

Fuente. Datos de la investigación.

El caso 2, inicia la resolución planteando la tabla de valores asociada a la función cuadrática, con la clara intención de construir la gráfica y a través de ella, encontrar la solución, lo que no era necesario. Pero al momento de calcular f (0), es decir, cuando x=0 que lo llevaría directamente al punto de intersección de la gráfica con el eje y, la sustitución realizada fue errónea, porque en lugar de $f(0) = 0^2 + 0 - 10$, sustituye $f(0) = 2^0 - 0 - 10 = 11$, lo cual hace que el resultado final sea incorrecto. De lo anterior, se puede inferir que el estudiante participó de manera pasiva en la memorización de pasos, sin claridad de lo pedido.

Los problemas no rutinarios, es decir, aquellos en los que no se conoce una respuesta ni un procedimiento previamente establecido o rutina, para encontrarla, se constituyeron en los de mayor dificultad en la prueba, como se verifica en las Figuras 10 y 11 donde se presentan las etapas de resolución del problema y los errores según su origen, respectivamente.

Figura 10. Rendimiento académico en problema no rutinario.

Fuente. Datos de la investigación.

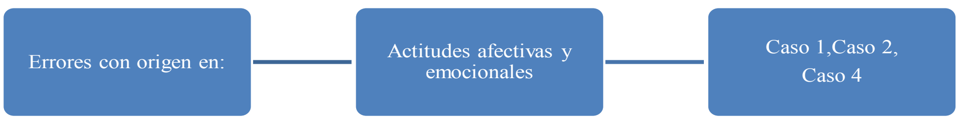
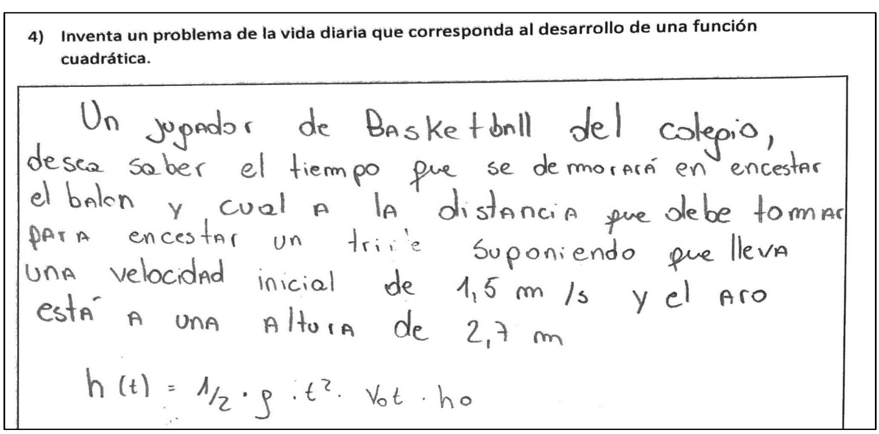


Figura 11. Errores según su origen en problema no rutinario.

Fuente. Datos de la investigación.

Consultados los estudiantes a través del cuestionario de opinión, respecto a las razones de su falta de resolución del problema no rutinario, sus respuestas se sitúan en problemas motivacionales y optan por las opciones de bloqueo en la resolución, omisión asociada a su disposición para la matemática.

A continuación, se presenta el caso 1 que fue el único que logró un desarrollo completo del P4 no rutinario (Figura12).



4) Inventa un problema de la vida diaria que corresponda al desarrollo de una función cuadrática.

Un jugador de Basketball del colegio, desea saber el tiempo que se demorará en encestar el balon y cual a la distancia que debe tomar para encestar un triple suponiendo que lleva una velocidad inicial de 1,5 m/s y el aro está a una altura de 2,7 m

$h(t) = 1/2 \cdot g \cdot t^2 \cdot V_0 t \cdot h_0$

Figura 12. Respuesta del caso 1 al problema no rutinario.

Fuente. Datos de la investigación.

Cabe hacer notar, que el caso 1 utiliza la fórmula que forma parte del problema 1 (P1) rutinario de contexto realista de la prueba, la cual fue dada con un contexto explícito, sin embargo, demuestra tener capacidad para reformular una situación problema de contextualización de la función cuadrática, en la cual logra involucrar la formula conocida por él.

Un segundo tipo de problema en los que se verificaron discretos desempeños, fueron los rutinarios de contexto realista. A continuación, se presenta un ejemplo de la prueba.

Problema 1: Una niña se encuentra parada en la parte superior de un edificio, y lanza una pelota hacia arriba desde una altura de pies, con una velocidad inicial de 30 pies por segundo. Utilice la fórmula $h = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + h_0$ para responder las siguientes preguntas:
A partir de su lanzamiento, ¿cuánto tiempo tardará la pelota en estar a pies respecto del piso?
A partir de su lanzamiento, ¿cuánto tiempo tardará la pelota en golpear el suelo?

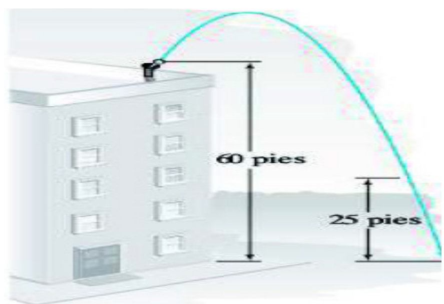


Figura 13. Problema rutinario de contexto realista.
Fuente. Datos de la investigación.

Las etapas de resolución del P1se presentan a continuación en la Figura 14.

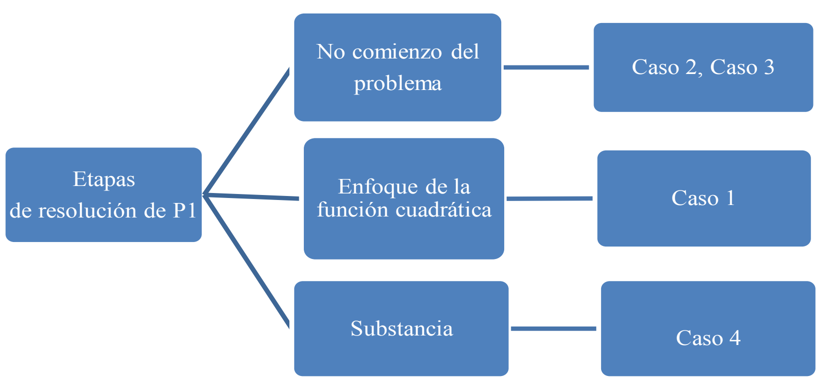
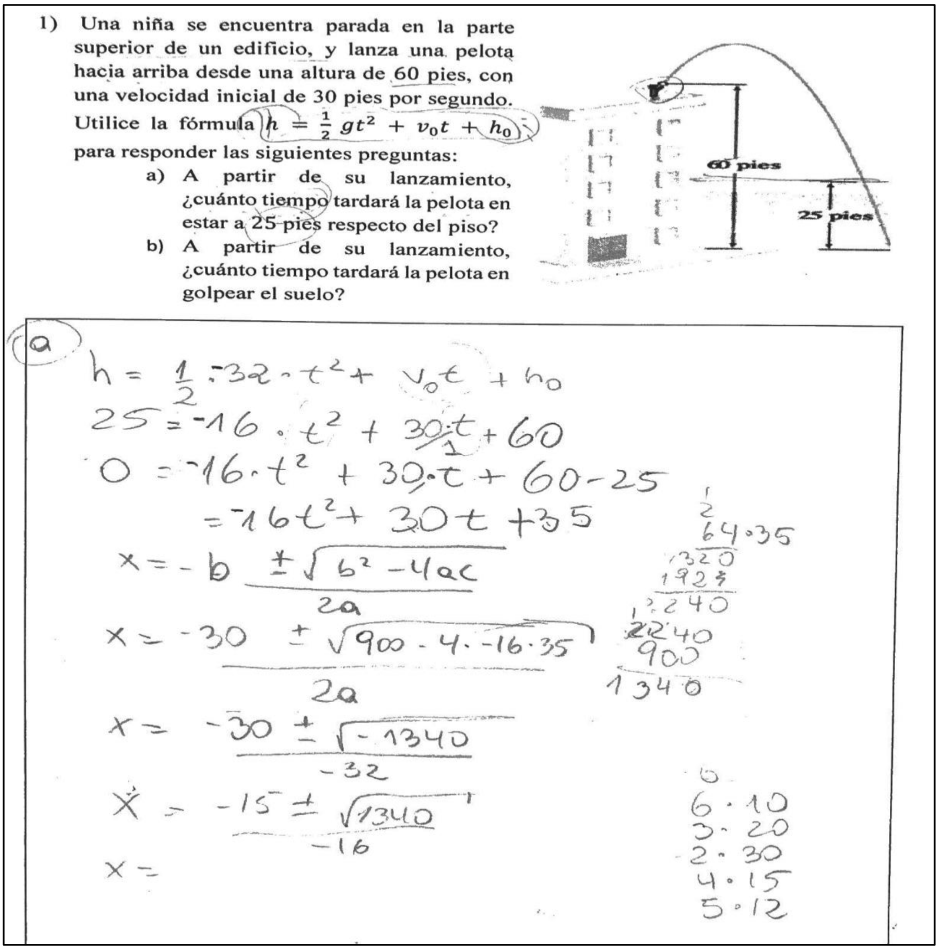


Figura 14. Rendimiento académico en problema rutinario de contexto realista.
Fuente. Datos de la investigación.

De acuerdo con el nivel de resolución y logro alcanzado en cada caso, se puede observar que sólo el caso 4 se orientó hacia una solución racional, pero interpretaciones erróneas impidieron el proceso de resolución correcta, específicamente, presentó errores en la multiplicación de números enteros negativos lo cual impidió avanzar a las etapas de resolución correcta.

A continuación, se presenta la resolución del problema de contexto realista del caso 4.



1) Una niña se encuentra parada en la parte superior de un edificio, y lanza una pelota hacia arriba desde una altura de 60 pies, con una velocidad inicial de 30 pies por segundo. Utilice la fórmula $h = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + h_0$ para responder las siguientes preguntas:

a) A partir de su lanzamiento, ¿cuánto tiempo tardará la pelota en estar a 25 pies respecto del piso?

b) A partir de su lanzamiento, ¿cuánto tiempo tardará la pelota en golpear el suelo?

a)

$h = \frac{1}{2} \cdot -32 \cdot t^2 + v_0 t + h_0$

$25 = -16 \cdot t^2 + 30 \cdot t + 60$

$0 = -16 \cdot t^2 + 30 \cdot t + 60 - 25$

$= -16t^2 + 30t + 35$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-30 \pm \sqrt{900 - 4 \cdot -16 \cdot 35}}{2a}$

$x = \frac{-30 \pm \sqrt{-1340}}{-32}$

$x = \frac{-15 \pm \sqrt{1340}}{-16}$

$x =$

$64 \cdot 35$ — 320, 192, 2240, 2240, 900, 1340

60: $6 \cdot 10$, $3 \cdot 20$, $2 \cdot 30$, $4 \cdot 15$, $5 \cdot 12$

Figura 15. Respuesta del caso 4 al problema rutinario de contexto realista.

Fuente. Datos de la investigación.

Como se evidencia en la producción del estudiante, éste realiza una correcta sustitución de los datos del enunciado, usando el valor de la velocidad y la altura inicial. No obstante, al reemplazar en la fórmula general, además de cambiar la variable t por x, comete un error en el cálculo del discriminante, pues al multiplicar $\sqrt{(900 - 4 \cdot - 16 \cdot 35)}$, presenta como resultado $\sqrt{- 340}$. Es posible deducir que el estudiante tiene conocimiento de las raíces negativas ya que, sin justificación alguna, cambia el signo de la cantidad subradical. Este tipo de error suele tener su origen, en un obstáculo. El uso incorrecto de signos en la multiplicación de números enteros es propio del álgebra y tiene que ver, en muchas ocasiones, con problemas de la aritmética no superados. Este obstáculo didáctico evidenciado, se relaciona con la

forma de enseñanza de la multiplicación de números enteros, impidiendo el avance a etapas superiores que evidencien la resolución efectiva de las dos interrogantes del problema.
En la Figura 16, se muestra una clasificación de los errores de los casos en el problema rutinario de contexto realista, atendiendo a los orígenes de estos.

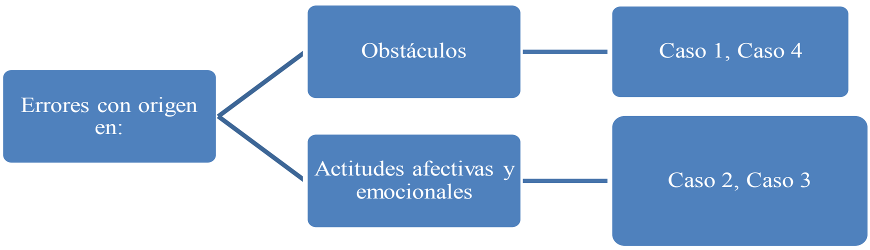


Figura 16. Errores según su origen en problema rutinario de contexto realista.
Fuente. Datos de la investigación.

Respecto a los errores clasificados según su origen, estos se registran de igual forma tanto en obstáculos matemáticos como en las actitudes afectivas y emocionales. Los casos 1 y 4 si bien inician la resolución, presentan errores como resultado de no haber asimilado relaciones y procesos, en un contexto de la vida diaria que requieren del cálculo del tiempo que alcanza una pelota al lanzarla a una cierta altura, y el tiempo que tarda en llegar al suelo. Por su parte, los casos 2 y 3, entregaron un trabajo sin significado, porque no lograron la comprensión del problema dado que no usaron el valor de la velocidad y la altura inicial. En el cuestionario de opinión aplicado, las respuestas sobre las razones de la falta de resolución evidencian relación con bloqueos producidos por el trabajo de resolución de problemas en matemática y excesiva confianza de la forma en cómo resolver una función cuadrática cuando se requiere sustitución de valores.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este estudio tuvo como objetivo obtener una mejor comprensión de los errores cometidos por los estudiantes al resolver tipos de problemas de aplicaciones de la función cuadrática.

En relación con el rendimiento académico de los cuatro casos de estudio y de acuerdo con los problemas que en su resolución sólo llegaron a la etapa de resultado -previa a la fase final de resolución correcta- fue porque dificultades menores condujeron a una solución errada. Por tanto, pueden ser considerados de menor importancia, dado que son superables mediante un trabajo consciente del estudiante, Si bien se presentaron en dos de los cuatro casos, no son tan relevantes en cuanto a los objetivos del presente trabajo, porque se consideran más importantes las etapas previas a la resolución, como substancia, enfoque y fundamentalmente, no comienzo. En la etapa de no comienzo se registraron las mayores frecuencias, que implica que el estudiante fue incapaz de comenzar el problema o entrega un trabajo que no tiene significado alguno. Los casos 2, 3 y 4 se quedaron sin resolver más de un problema. Sólo el caso 1, logró abordar todas las situaciones de contextualización de la función cuadrática, y en la mayoría de ellas, resolver adecuadamente el problema planteado.

En relación con el tipo de problema de los autores Díaz y Poblete (2001) asociado al rendimiento académico, podemos indicar que los de mayor rendimiento en todos los casos de estudio, fueron los rutinarios de contexto puramente matemático seguidos con una menor frecuencia, de los problemas rutinarios de contexto fantasista. De contexto puramente matemático, porque hacen referencia exclusiva a objetos matemáticos, números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc. y corresponden a problemas que están presentes comúnmente en la literatura e inherentes a la forma usual de la praxis, por tanto, es previsible que los estudiantes hayan tenido la oportunidad de practicarlos con anterioridad. De contexto fantasista, sin fundamento en la realidad y fruto de la imaginación, sin embargo, son problemas que, conteniendo objetos matemáticos claramente definidos, resultan motivantes para los alumnos, al considerar situaciones fantasistas como el salto de un grillo, pero que convergen en una contextualización de la función cuadrática, coincidiendo con Díaz (2020) en la investigación de tipos de problemas en aplicaciones de la derivada con estudiantes de ingeniería. Estos problemas diferentes y originales logran despertar la curiosidad y motivación del alumno al tratar de acercar elementos de fantasía a la realidad e intereses de los alumnos por el conocimiento que de ellos tienen, con objeto de que aprendan a resolver estos problemas que se han contextualizado a un objeto matemático específico.

Por otra parte, el problema de menor desempeño matemático fue el no rutinario. En este problema el estudiante no conoce una respuesta ni un procedimiento previamente establecido o rutina para realizarlo. Es así como tres de cuatro casos de estudio no lograron comenzar su resolución, a excepción del caso 1. Este resultado coincide con variadas investigaciones, tales como la de Kaya y Kablan (2018) quienes mencionan la dificultad de los estudiantes en lograr encontrar más de una solución a un problema no rutinario; con Akyüz (2020), en una investigación reciente con futuros profesores, cuyo desempeño disminuyó cuando aumentó el nivel de dificultad del problema considerado no rutinario. En estudios similares, los candidatos a docentes mostraron un bajo éxito en problemas relacionados con problemas no rutinarios (Dündar, 2015; Akgün *et al.*, 2012); con otras investigaciones donde se reporta que los estudiantes tienden a usar la operación aritmética para resolver problemas no rutinarios (Dündar, 2015).

El análisis de la prueba y respuestas al cuestionario de opinión proporciona una idea de los errores de procedimiento y conceptuales más comunes en los alumnos. Se descubre que, en los errores cognitivos presentados en la mayoría de los casos de estudio, tienen su origen en ausencia del sentido, donde ha predominado la dificultad de procedimiento. En estos errores, si bien los estudiantes demuestran conocimiento de aplicación de la fórmula de la ecuación cuadrática, no logran comprender que existe un único punto máximo o mínimo de este objeto matemático, que se asocia a los fenómenos de cambio; también se les dificultó diferenciar la variable dependiente de la independiente. En general, no lograron la resolución efectiva de los tipos de problemas, que quedó limitada a la aplicación algorítmica de un procedimiento algebraico más básico (aplicación de inversos aditivos y multiplicativos, resolución de la ecuación, etc.). Ante la posibilidad de trabajar en la interpretación de la función cuadrática como objeto matemático, los estudiantes tienden a desarrollar procesos algebraicos y memorísticos, lo que limita el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas. En estos errores para lograr su superación, se requiere una intervención mayor de parte del profesor, pero también un trabajo en conjunto con el estudiante, ya que en este tipo de errores se manifiestan la falta de contenidos tanto teóricos como conceptuales, coincidiendo con las investigaciones de Agustyaningrum *et al*. (2018). El caso 2, registró los mayores errores con ausencia del sentido en la resolución de la prueba de matemática. Los estudiantes desarrollaron principalmente actividades rutinarias, es decir, problemas con elementos que se exploran durante la experiencia educativa, pero las tareas o problemas no rutinarias ocasionaron desconcierto, coincidiendo con los hallazgos de (Benítez, 2010).

Los errores con origen en las actitudes afectivas y emocionales fueron mayoritariamente los de mayor frecuencia en los cuatro casos de estudio de ambas regiones. Al ser consultados por las razones de la falta de resolución en determinados problemas, coincidieron en tener bloqueo a la hora de iniciar la resolución, excesiva confianza la hora de resolver un problema y omisión asociada a su disposición para la matemática. Estos hallazgos coinciden con Lester y Kehle (2003) que reconocen que la dificultad, además de las características de un problema, también depende de la disposición motivacional que tienen los estudiantes.

Del mismo modo, las investigaciones de Hall y Goetz (2013), Pekrun y Linnenbrink-Garcia (2014) han demostrado que las emociones de los estudiantes están vinculadas a su rendimiento académico. Por lo general, las emociones positivas, como el agrado del aprendizaje, muestran vínculos positivos con los logros, y las emociones negativas, como la ansiedad ante las evaluaciones, muestran vínculos negativos.

Esta investigación realizada con tipos de problemas según naturaleza y contexto, clasificación de errores según su origen cometidos por los alumnos cuando resuelven problemas de aplicación de la función cuadrática, nos permite contar con un instrumento evaluativo que a futuro permitirá continuar analizando porqué se equivocan los estudiantes y de qué manera afecta el dominio afectivo en el trabajo en matemática en general y en la resolución de problemas en particular. Contar con instrumentos que complementan el dominio cognitivo con el dominio afectivo, nos permite abrir la puerta para investigaciones cuantitativas en establecimientos educacionales con distintos tipos de dependencia administrativa y de esta forma estudiar la relación dependencia administrativa, el rendimiento académico de los estudiantes en la resolución de problemas contextualizados y la praxis en matemática sobre errores, incluso en otras áreas de la matemática y la posible vinculación que pueden existir entre ellas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, D. M., McLaren, B. M., Durkin, K., Mayer, R. E., Rittle-Johnson, B., Isotani, S. & Van Velsen, M. (2014). Using erroneous examples to improve mathematics learning with a web-based tutoring system. *Computer in Human Behavior*, *36*, 401–411. http://doi.org/10.1016/j.chb.2014.03.0530747-5632/Ó2014

Agencia de Calidad de la Educación (2017). *Informe Nacional TIMSS 2015*. http://archivos.agenciaeducacion.cl/informe_nacional_de_resultados_TIMSS_2015.pdf

______. (2018). *Resultados educativos 2018*. Ministerio de Educación de Chile.

Agustyaningrum, N., Abadi, A. & Mahmudi, A. (2018). An analysis of students' error in solving abstract algebra tasks. *Journal of Physics: Conference Series*. 1097. 012118. http://doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012118

Akgün, L., Işık, C., Tatar, E., İşleyen, T. & Soylu, Y. (2012). Transfer of mathematical knowledge: series. *Australian Journal of Teacher Education*, *37*(3), 83-89. http://doi.org/10.14221/ajte.2012v37n3.2

Akyüz, G. (2020). Non-routine problem solving performances of mathematics teacher candidates. *Educational Research Review*, *15*(5), 214-224. http://doi.org/10.5897/ERR2020.3907

Altun, I. (2003). The perceived problem solving ability and values of student nurses and midwives. *Nurse Education Today*, *23*, 575-84. http://doi.org/10.1016/S0260-6917(03)00096-0.

Atkinson, R. K., Renkl, A. & Merrill, M. M. (2003). Transitioning from studying examples to solving problems: Combining fading with prompting fosters learning. *Journal of Educational Psychology*, *95*, 774–783. http://doi.org/10.1037/0022-0663.95.4.774

Aros, E. (2018). *Una metodología de enseñanza que usa la modelización matemática enmarcada en la teoría del Ciclo de Kolb, para abordar el contenido de función cuadrática en estudiantes de tercer año medio de un Liceo municipal de Los Ángeles* [tesis de Licenciatura en Educación y Profesor de Matemáticas y Educación Tecnológica, Universidad de Concepción]. Repositorio UDEC. http://repositorio.udec.cl/jspui/handle/11594/2459

Bajaña, C. (2019). *Propuesta didáctica para la enseñanza de funciones y ecuaciones cuadráticas, a través del uso de: "Desmos Graphing Calculator"* [tesis Licenciatura en Ciencias de la Educación en Matemáticas y Física, Universidad de Cuenca]. Repositorio UCUENCA. http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/32728

Beilock, S. L., Schaeffer, M. W. & Rozek, C. S. (2017). Understanding and addressing performance anxiety. En Elliot, A. J., Dweck, C. S. & Yeager, D. S. (eds.). *Handbook of competence and motivation: Theory and application* (pp. 155-172). The Guilford Press.

Benítez, A. (2010). Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica: El caso de los polinomios de grado 2 y 3. *Educación Matemática*, *22*(1), 5-29. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262010000100002&lng=es&tlng=es.

Benning, I. & Agyei, D. D. (2016). Effect of using spread sheet in teaching quadratic functions on the performance of senior high school students. *International Journal of Education, Learning and Development*, *4*(1), 11-29.

Berger, N., Mackenzie, E. & Holmes, K. (2020). Positive attitudes towards mathematics and science are mutually beneficial for student achievement: a latent profile analysis of TIMSS 2015. *The Australian Educational Researcher*, *47*, 409–444. http://doi.org/10.1007/s13384-020-00379-8

Blanco, L., Guerrero, E. & Caballero, A. (2013). Cognition and affect in mathematics problem solving with prospective teachers. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 335-364. https://scholarworks.umt.edu/tme/vol10/iss1/15

Boesen, J., Lithner, J. & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(1), 89–105. http://doi.org/10.1007/s10649-010-9242-9

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problems en mathématiques problems. En J. Vanhamme & W. Vanhamme (eds.). *La problématique l'enseignement des mathématiques. XXVIII Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching*. Louvain la Neuve.

Brown, S., Breunlin, R. J., Wiltjer, M. H., Degner, K. M., Eddins, S. K. & Edwards, M. T. (2007). *Algebra: Ucsmp Grades 6-12 (UCSMP Algebra)* (3.ª ed.). McGraw-Hill Companies. https://www.amazon.com/-/es/Susan-Brown/dp/0076213862

Budd, C. & Sangwin, C. (2004). 101 uses of a quadratic equation: Part II. *Magazine Living Mathematics*, *30*. http://plus.maths.org/content/os/issue30/features/quadratics/index

Çelik, Ö. & Güzel, B. (2019). An instructional sequence triggering students' quantitative reasoning during learning of quadratic functions. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *10*(1), 157-194. http://doi.org/10.16949/turkbilmat.446403

Center, M. W. (2012). Why should we care about quadratic equations? *Math Worksheets Center. Blog*. http://www.mathworksheetcenter.com/mathtips/quadraticequation.html

Cervantes, G. & Martínez, R. (2007). Sobre algunos errores comunes en desarrollos algebraicos. *Zona Próxima*, *8*, 34-41. http://www.redalyc.org/pdf/853/85300804.pdf

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*, 1-6. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9234-7

Davis, J. D., Smith, D. O., Roy, A. R. & Bilgic, Y. K. (2014). Reasoning-and-proving in algebra: The case of two reform-oriented U.S. Textbooks. *International Journal of Educational Research*, *64*, 92–106. https://www.learntechlib.org/p/203305/

Díaz V. (2020). Difficulties and performance in mathematics competences: solving problems with derivatives. *International Journal of Engineering Pedagogy*, *10*(4), 35-53. http://doi.org/10.3991/ijep.v10i4.12473

Díaz, V. & Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *45*(1), 33-41.

______. (2018). Uso de modelos didácticos de los docentes de matemáticas en la enseñanza de funciones logarítmicas, cuadráticas y exponenciales. *Paradigma*, *39*(1), 353-372. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7304256

______. (2019). Competencias matemáticas: Desempeño y errores en la resolución de problemas de límites. *Paradigma*, *40*(1), 358-383. http://funes.uniandes.edu.co/16340/

Díaz, V., Belmar, H. & Poblete, A. (2018). Emotional manifestation and modeling of a mathematical function. *Bolema*, *32*(62), 1198-1218. http://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a22

Didis, M. G., Bas, S. & Erbas, A. (2011, 9 of february). Students' reasoning in quadratic equations with one unknown [conference session]. Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-7), University of Rzeszów, Poland.

Dündar, S. (2015). The investigation of teacher candidates' skills of solving exercises and non-routine problems related to the topic of series. *Kastamonu Education Journal*, *23*(3),1293-1310. https://kefdergi.kastamonu.edu.tr/index.php/Kefdergi/article/view/724

Durkin, K. & Rittle-Johnson, B. (2012). The efectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction*, *22*(3), 206–214. http://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.11.001

Ellis, A. B. & Grinstead, P. (2008). Hidden lessons: How a focus on slope-like properties of quadratic functions encouraged unexpected generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(4), 277-296. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.11.002

Eraslan, A. (2008). The notion of reducing abstraction in quadratic functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *39*(8), 1051-1060. http://doi.org/10.1080/00207390802136594

Esquer, M. P., Robles, A., Cosmes, S. & Ansaldo, J. (2015). Propuesta didáctica con funciones cuadráticas de problemas en contexto a nivel superior. En Rodríguez, F. & Rodríguez, R. (eds.). *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 376-381). Red Cimates.

Farez, M. (2018). *Resolución de funciones cuadráticas mediante el uso de objetos de aprendizaje por parte de estudiantes de segundo año de bachillerato, en la fase de retroalimentación* [tesis de Magister en Docencia de las Matemáticas, Universidad de Cuenca]. Repositorio UCUENCA. https://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/30383/1/Trabajo%20de%20titulaci%C3%B3n.pdf

Fuadi, I., Minarni, A. & Banjarnahor, H. (2017). Analysis of students' mathematical problem solving ability in ix grade at junior high school ar-rahman percut. *International Journal of Novel Research in Education and Learning*, *4*(2), 153-159. https://www.researchgate.net/publication/319207497_analysis_of_students'_mathematical_problem_solving_ability_in_ix_grade_at_junior_high_school_ar-rahman_percut

Fulgar, A. (2020). Comparative analysis of mathematics proficiency and attitudes toward mathematics of senior high school student 2020. *International Journal of Scientific and Research Publications*, *10*(5), 211-222. http://doi.org/10.29322/IJSRP.10.05.2020.p10125

Gómez-Blancarte, A., Guirette, R. & Morales-Colorado, F. (2017). Propuesta para el tratamiento de interpretación global de la función cuadrática mediante el uso del software GeoGebra. *Educación Matemática*, *29*(3), 189-224. http://doi.org/10.24844/em2903.07

Good. T. L. & Lavigne, A. L. (2018). *Looking in classrooms* (11.ª ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315627519

Große, C. S. & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: can this foster learning outcomes? *Learning and Instruction*, *17*(6), 612–634. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.008

Hall, N. & Goetz, T. (2013). *Emotion, motivation, and self-regulation: A handbook for teachers*. Emerald Publishing Limited.

Haciomeroglu, G. (2013). The field experiences of student teachers and effective mathematics teaching in Turkey. *Australian Journal of Teacher Education*, *38*(2), 131-142. https://doi.org/10.14221 /ajte.2013v38n2.5

Heinze, A. & Reiss, K. (2007). Mistake-handling activities in the mathematics classroom: Effects of an in-service teacher training on students' performance in geometry. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.9-16). PME.

Henderson, S. (2012). Why the journey to mathematical excellence may be long in Scotland's primary schools. *Scottich Education Review*, *44*(1), 46–56. http://www.scotedreview.org.uk/media/microsites/scottish-educational-review/documents/339.pdf

Hernández, J., Castañeda, A. & González, R. (2019). La solución de un problema matemático no convencional por estudiantes universitarios. *Revista Científica*, *35*(2). http://doi.org/10.14483/23448350.14863

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill.

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria* [tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio PUCP. http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/1571

Hyrkäs, K., Appelqvist-Schmidlechner, K. & Oksa, L. (2003). Validating an instrument for clinical supervision using an expert panel. *International Journal of Nursing Studies*, *40*(6), 619-625. http://doi.org/10.1016/s0020-7489(03)00036-1

Jäder, J., Lithner, J. & Sidenvall, J. (2019). Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. http://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1656826

Kaya, S. & Kablan, Z. (2018). The Analysis of the Studies on Non-Routine Problems. Necatibey Faculty of Education. *Electronic Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(1), 44-25. http://doi.org/10.17522/balikesirnef.437652

Kilic, H. (2011). Preservice secondary mathematics teachers' knowledge of students. *Turkish Online Journal of Qualitative Inquiry*, *2*(2), 17-35. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED537822.pdf

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Kotsopoulos, D. (2007). Unravelling student challenges with quadratics. *Australian Mathematics Teacher*, *63*(2), 19-24. https://eric.ed.gov/?id=EJ769977

Langat, A. C. (2015). Students' attitudes and their effects on learning and achievement in Mathematics: A Case study of public secondary schools in Kiambu County, Kenya [Degree of Master of Education, Kenyatta University]. Repository KU. https://ir-library.ku.ac.ke/bitstream/handle/123456789/10911/Students%E2%80%99%20attitudes%20and%20their%20effects%20on%20learning%20and%20achievement%20in%20mathematics....pdf?sequence=4&isAllowed=y

Lester, F. & Kehle, P. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In Lesh, R. & Doerr, R. (eds.). *Beyond constructivism – models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 501–517). Erlbaum Associates.

Loibl, K. & Rummel, N. (2014). Knowing what you don't know makes failure productive. *Learning and Instruction*, *34*, 74–85. http://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.08.004

López, J., Robels, I. & Martínez-Planell, R. (2015). Students' understanding of quadratic equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(4), 552-572. http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0020739X.2015.1119895?

McLaren, B. M., Adams, D., Durkin, K., Goguadze, G., Mayer, R. E., Rittle-Johnson, B. & Van Velsen, M. (2012). *To err is human, to explain and correct is divine: a study of interactive erroneous examples with middle school math students. 21st Century learning for 21st Century skills.* Springer.

McLaren, B. M., Adams, D. M. & Mayer, R. E. (2015). Delayed learning efects with erroneous examples: a study of learning decimals with a web-based tutor. *International Journal Artificial Intelligence in Education, 25*, 520–542. http://doi.org/10.1007/s40593-015-0064-x

Mensah, J. K., Okyere, M. & Kuranchie, A. (2013). Student attitude towards mathematics and performance: Does the teacher attitude matter. *Journal of Education and Practice*, *4*(3), 132-139. https://www.iiste.org/Journals/index.php/JEP/article/view/4502

Metcalf, R. C. (2007). *The nature of students' understanding of quadratic functions* [Doctoral Dissertation, University of New York]. Repository NYU. https://search.proquest.com/openview/e80834c1901152addab35057c9c1cbf2/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y

MINEDUC (2015). *Bases Curriculares 7°* Básico *a 2°* Medio. Ministerio de Educación.

______. (2019). *Fundamentos Bases Curriculares 3° y 4° Medio*. Ministerio de Educación.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(1), 3-14. http://doi.org/10.2307/749532

Mutambara, L. H. N., Tendere, J. & Chagwiza, C. J. (2020). Exploring the conceptual understanding of the quadratic function concept in teachers' colleges in Zimbabwe. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), em 1817. http://doi.org/10.29333/ejmste/112617

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

______. (2014). *Principles to actions: ensuring mathematical success for all*. NCTM

______. (2018). *Catalyzing change in high school mathematics: Initiating critical conversations*. NCTM.

______. (2020). *Standards for the preparation of secondary mathematics teachers*. NCTM

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers (2010). *Common Core State Standards*. NGA Center and CCSSO.

Nielsen, L. E. J. (2015). Understanding quadratic functions and solving quadratic equations: An analysis of student thinking and reasoning. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *3*(4), 351-361. http://hdl.handle.net/1773/33799

Niss, M. (2003). The mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In Gagatsis, A. & Papastavridis, S. (eds.). *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 115–124). Hellenic Mathematical Society.

OECD. (2014). *PISA 2012 results in focus: What 15-year-olds know and what they can do with what they know*. OECD Publishing.

______. (2019). *OECD skills strategy 2019. Skills to shape a better future*. OECD Publishing.

Oser, F. & Spychiger, M. (2005). *Lernen ist schmerzhaft. Zur Theorie des Negativen Wissens und zur Praxis der Fehlerkultur*. Beltz.

Özaltun, C. & Bukova, G. (2019). An instructional sequence triggering students' quantitative reasoning during learning of quadratic functions. *Turkish Journal of Computer & Mathematics Education*, *10*(1), 157-194. http://doi.org/10.16949/turkbilmat.446403

Parent, J. S. S. (2015). *Students' understanding of quadratic functions: Learning from students' voices* [Doctoral Dissertation of Education, University of Vermont]. Repository UVM. https://scholarworks.uvm.edu/graddis/376

Pekrun, R. & Linnenbrink-Garcia, L. (2014). *International Handbook of Emotion in Education*. Routledge.

Peralta-García, J., Encinas-Pablos, F. & Cuevas-Salazar, O. (2019). Diagnóstico de conocimientos previos sobre la parábola en estudiantes universitarios. *Revista de Educación Superior*, *3*(8), 1-11. http://doi.org/10.35429/JHS.2019.8.3.1.11

Peranginangin, S. (2017). An analysis of students' mathematics problem solving ability in vii grade at smp negeri 4 pancurbatu. *International Journal of Sciences: Basic and Applied Research*, *33*(2), 57-67. https://www.gssrr.org/index.php/JournalOfBasicAndApplied/article/view/7330/3451

Peteros, E., Columna, D., Etcuban, J. O., Almerino J.P. & Almerino, J.G. (2019). Attitude and Academic Achievement of High School Students in Mathematics Under the Conditional Cash Transfer Program. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *14*(3), 583-597. http://doi.org/10.29333/iejme/5770

Radatz, H. (1980). Students'errors in the mathematical learning process. *For the Learning of Mathematics*, *1*(1), 16–20. https://www.jstor.org/stable/40247696?seq=1

Rasch, G. (1980). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. The University of Chicago Press.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick J., Gómez P. & Rico L. (eds.). *Educación Matemática* (pp. 69-108). Grupo Editorial Iberoamérica.

Ruli, R. M., Priatna, N., Sufyani, P. & Endang, M. (2018). Analysis learning obstacle on quadratic function topic. *International Journal of Information and Education Technology*, *8*(9), 681-684, http://doi.org/10.18178/ijiet.2018.8.9.1122

Rushton, S. J. (2018). Teaching and learning mathematics through error analysis. *Fields Mathematics Education Journal*, *3*(4). http://doi.org/10.1186/s40928-018-0009-y

Schoenfeld, A. H. (2012). Problematizing the didactic triangle. *ZDM*, *44*(5), 587–599. http://doi.org/10.1007/s11858-012-0395-0

Sisman, G.T. & Aksu, M. (2015). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(7), 1293–1319. http://doi.org/10.1007/s10763-015-9642-5

Skjong, R. & Wentworth, B. (2001). Expert judgement and risk perception. *Proceedings of Eleventh the International Offshore and Polar Engineering Conference* (pp.537-544). Norway.

Sloan, T.R. (2010). A quantitative and qualitative study of math anxiety among preservice teachers. *The Educational Forum*, *74* (3), 242-256. http://doi.org/10.1080/00131725.2010.483909

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico, L. (ed.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Horsori.

Strickland, T. K. (2011). *The effects of blended instruction and visual representations on area problems invloving quadratic expressions for secondary students with mathematics learning difficulties* [Doctoral Dissertation, University of Maryland]. Repository UMD. http://hdl.handle.net/1903/11905

Tambychika, T., Subahan, M. & Meerah, M, (2010). Students' difficulties in mathematics problem-solving: What do they say? *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *8*, 142–151. http://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.020

Tapia, M. & Marsh, G. E. (2005). Attitudes toward mathematics inventory redux. *Academic Exchange Quarterly*, *9*(3), 272-277. https://www.semanticscholar.org/paper/Attitudes-Toward-Mathematics-Inventory-Redux-Tapia-Marsh/8de12218ac3b0138ca39213eefee6277e44e4077

Tsovaltzi, D., Melis, E., McLaren, B. M., Meyer, A. K., Dietrich, M. & Goguadze, G. (2010). Learning from erroneous examples: when and how do students beneft from them? In Wolpers, M., Kirschner, P., Scheffel, M., Lindstaedt,S. & Dimitrova, V. (eds). *Sustaining TEL: from innovation to learning and practice* (pp. 357–373). Springer.

Vaiyavutjamai, P., Ellerton, N. F. & Clements, M. A. (2005). Students' attempts to solve two elementary quadratic equations: A study in three nations. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, 735-742. https://www.tib.eu/de/suchen/id/BLCP%3ACN057345444/Students-Attempts-to-Solve-Two-Elementary-Quadratic/

Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *19*(1), 20-44. https://eric.ed.gov/?id=EJ548083