Estudios Pedagógicos XLIX, N° 3: 109-129, 2023
DOI: 10.4067/S0718-07052023000400109

INVESTIGACIONES

Sentido estructural que manifiesta un grupo de docentes de matemática en pre-servicio cuando resuelven tareas sobre factorización

Structural Sense Expressed by a Group of Pre-service Mathematics Teachers When They Resolve Factorization Tasks

Marianella Bolaños-Barquero[a, 1]
José Romilio Loría-Fernández[a, 2]
Miguel Picado-Alfaro[a, 3]

[a] Universidad Nacional, Costa Rica.
marianella.bolanos.barquero@una.cr, jose.loria.fernandez@una.cr, miguel.picado.alfaro@una.cr

RESUMEN

El currículo de matemática costarricense promueve el desarrollo de habilidades algebraicas en el estudiantado de educación secundaria. Esto repercute directamente en la formación inicial del profesorado que deberá incluir el fomento de diversas capacidades vinculadas con el sentido estructural. Este artículo profundiza en el sentido estructural manifestado por 20 docentes en pre-servicio, cuando resuelven tareas matemáticas sobre factorización de polinomios. La investigación es descriptiva y corresponde a un estudio instrumental de casos. El análisis consideró tres categorías primarias adaptadas de propuestas teóricas sobre el sentido estructural, que resaltan el reconocimiento de estructuras algebraicas en su forma más simple, compuestas y la manipulación de diversas estructuras. Se han identificado fortalezas en el sentido estructural de estas personas cuando resuelven tareas con estructuras algebraicas familiares. Además, se evidencian debilidades cuando resuelven tareas con estructuras compuestas, que se intensifican al enfrentarse a tareas que conllevan el uso de manipulaciones diversas en las estructuras algebraicas.

Palabras clave: álgebra, errores algebraicos, estructuras algebraicas, formación de profesores, polinomios.

ABSTRACT

The Costa Rican mathematics curriculum promotes the development of algebraic skills in secondary education students. This has a direct impact on the initial training of teachers, which should include the promotion of various capacities related to the structural sense. This article delves into the structural sense manifested by 20 pre-service teachers, when they solve mathematical tasks on factoring polynomials. The research is descriptive and corresponds to an instrumental study of cases. The analysis considered three main categories adapted from theoretical proposals on the structural sense, which highlight the recognition of algebraic structures in their simplest form, composite form, and the manipulation of various structures. Results show that strengths in the structural sense of these teachers have been identified when they solve tasks with familiar algebraic structures. Add to this, weaknesses are evident when they solve tasks with composite structures, these weaknesses are intensified when they face tasks that involve the use of various manipulations in algebraic structures.

Keywords: Algebra, Algebraic errors, Algebraic structures, Teacher training, Polynomials.

[1] Orcid ID: https://orcid.org/0000-0002-6747-7597

[2] Orcid ID: https://orcid.org/0000-0002-3135-451X

[3] Orcid ID: https://orcid.org/0000-0002-7574-0797

Recibido: 31/12/2022
Aceptado: 20/06/2023

1. INTRODUCCIÓN

Históricamente, el álgebra ha ocupado un lugar importante en el currículo de matemáticas para la educación secundaria, cuya finalidad ha sido la promoción del pensamiento algebraico en el estudiantado. A pesar de las recientes iniciativas por dar un abordaje temprano a las nociones algebraicas en la educación primaria —enmarcado en la generalización aritmética—, es en la segunda enseñanza donde se reconoce un abordaje amplio y profundo de conceptos y procedimientos algebraicos, particularizado al uso del lenguaje algebraico, la resolución de problemas y el fomento del pensamiento algebraico.

A partir de una recopilación de estudios sobre pensamiento algebraico, Socas (2011) pone en relieve la necesidad de profundizar en lo que estudiantes y docentes pueden hacer desde el pensamiento algebraico, según los distintos ciclos o niveles del sistema educativo. Su reflexión lo lleva a sintetizar tres tipos de estudios vinculados a esta temática: (a) transición del pensamiento numérico al algebraico, (b) procesos específicos del pensamiento algebraico, y (c) propuestas para el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra en la educación secundaria. El estudio que se presenta se enmarca en las dos últimas propuestas, acentuando el desarrollo de procesos de pensamiento algebraico, particularizados al sentido estructural de docentes de matemática en formación inicial (pre-servicio), como componente de su formación profesional y de su conocimiento especializado.

Cabe considerar, por otra parte, las limitaciones en cuanto al aprendizaje del álgebra, numeradas y descritas por diversos autores, que enfatizan las dificultades y los errores evidenciados por el estudiantado de educación secundaria al tratar y operar con expresiones algebraicas (Kieran y Filloy, 1989). En cuanto a las dificultades, Socas (1997, 2007) detalla: la complejidad de los objetos matemáticos y los procesos de pensamiento, los procesos de enseñanza y su incidencia en el aprendizaje de las matemáticas, el desarrollo cognitivo del estudiantado, y los factores emocionales y actitudinales hacia las matemáticas. Los errores algebraicos se abordan a partir de: (a) factores cognitivos, didácticos y epistemológicos, (b) la ausencia de sentido semiótico, estructural y autónomo, y (c) las actitudes afectivas. Específicamente, destacamos la necesidad de analizar el pensamiento algebraico de personas docentes de matemáticas, para la atención de errores ocasionados por la ausencia de sentido estructural en el estudiantado de educación secundaria.

Este panorama hace eco en la formación de docentes de matemáticas —especialmente en la formación inicial— materializada en la necesidad de que este profesorado conozca y prevea las dificultades y los errores que pueden manifestarse cuando sus estudiantes efectúan procedimientos vinculados a las expresiones algebraicas. Pero, es aún más necesario que el profesorado cuente con un alto sentido estructural que le dote de las capacidades requeridas para promover distintas habilidades algebraicas en el estudiantado, según los lineamientos curriculares en cada país, especialmente en Costa Rica.

En este artículo se aborda el conocimiento del profesorado en pre-servicio, desde el estudio del sentido estructural en álgebra. En la perspectiva que aquí se adopta, y con especificidad, se cuestiona: ¿qué evidencias surgen del sentido estructural en un grupo de docentes en formación inicial cuando resuelven tres tareas matemáticas sobre factorización de polinomios?

En relación con la problemática expuesta, se pretende analizar el sentido estructural que manifiesta este grupo de profesores y profesoras en pre-servicio, mediante la identificación de descriptores en los procedimientos mostrados cuando resuelven tareas algebraicas sobre factorización de polinomios.

2. MARCO TEÓRICO

La fundamentación teórica de la investigación se construye desde tres focos de interés que muestran el acercamiento del estudio a propuestas ya establecidas. Estos focos son: el enfoque estructural de las expresiones algebraicas, las propuestas sobre el sentido estructural y la formación inicial del profesorado de matemáticas, desde un abordaje del álgebra escolar.

2.1. LAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Desde una perspectiva general, las concepciones del álgebra están relacionadas con los diferentes usos de las variables (Usiskin, 1988). Estas formas de entender el álgebra sustentan una tipología particular basada en cinco formas de concebir el álgebra.

- El álgebra como *aritmética generalizada*, donde es natural pensar en variables como generalizadores de patrones.
- El álgebra como *estudio de procedimientos*, para resolver ciertos tipos de problemas, donde las variables son incógnitas o constantes.
- El álgebra como *estudio de relaciones* entre cantidades, argumentos y parámetros; bajo esta concepción una variable es un argumento (representa un valor de dominio de una función) o un parámetro, es decir, representa un número del que otros números dependen; aquí existen las nociones de variable independiente y dependiente.
- También, se concibe el álgebra como *lenguaje algebraico*, es decir, un medio para hacer presentes las ideas matemáticas (sistema de representación).
- Por último, está la concepción del álgebra como *estudio de estructuras*, aquí la variable es poco más que un símbolo arbitrario, donde se quiere que los estudiantes tengan los referentes (generalmente números reales), pero también se quiere que el estudiantado pueda operar con las variables sin tener que ir siempre al nivel del referente, como por ejemplo en las factorizaciones y la verificación de identidades.

Con respecto a la última concepción, que resulta de interés para el estudio que se presenta, en matemática el concepto de *estructura* se refiere a una entidad que se compone de partes, conectadas o relacionadas entre sí (Hoch y Dreyfus, 2004).

Al respecto, Castro *et al*. (2018) sostienen que tanto las expresiones aritméticas como las algebraicas, presentan una estructura caracterizada a partir de los términos que integran esas expresiones, los signos que los relacionan, el orden de las distintas operaciones y las relaciones que existen entre sus elementos.

Como ejemplos de estructuras algebraicas están las fracciones algebraicas y las ecuaciones cuadráticas. Estas estructuras tienen la posibilidad de permitir cambios o trasformaciones que proporcionan una expresión equivalente a la original, pudiendo presentar la misma estructura externa (forma o apariencia de la expresión) o interna (relaciones y conexiones entre las cantidades y las operaciones).

A título ilustrativo, se presentan las siguientes expresiones algebraicas (Vega, 2013): (a) $(x + 3)^2$(b) $x^2 + 9 + 6x$, (c) $(3x + 6)^2$ y (d) $(x^2 + 9x - 3x + 10 - 1)$. En estas, (a), (b) y (d) tienen la misma estructura interna —pues las operaciones y relaciones entre sus términos las hacen equivalentes—, pero tienen diferente estructura externa. Por su parte, (a) y (c) presentan la misma estructura externa —la misma forma, el cuadrado de un binomio— pero no tienen la misma estructura interna.

2.2. CONCEPCIONES DEL SENTIDO ESTRUCTURAL

El sentido estructural se ha definido a partir del estudio de las formas en que aprende el estudiantado en matemáticas. Estos estudios han acentuado las habilidades cognitivas y las dificultades del estudiantado, cuando aplican conocimientos matemáticos en un contexto algebraico.

Linchevski y Livneh (1999) utilizaron por primera vez el término sentido de la estructura al describir las dificultades de estudiantes para utilizar el conocimiento de las estructuras aritméticas, en las etapas iniciales del aprendizaje del álgebra. Estos mismos autores se cuestionaron si la intervención directa en contextos numéricos específicos llevaba a las personas estudiantes con dificultades en esos contextos, a tener éxito en los contextos algebraicos correspondientes (Livneh y Linchevski, 2007). Los resultados de su estudio apoyan la hipótesis de que la enseñanza de la aritmética para los propósitos algebraicos puede evitar ciertos errores estructurales en el estudiantado que se inician en el álgebra. De forma general, el término sentido estructural alude a una serie de habilidades relacionadas con transformar expresiones algebraicas, que permite hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas (Linchevski y Livneh, 1999).

Por otra parte, Hoch y Dreyfus (2004) refieren al sentido de la estructura como un conjunto de habilidades que pretenden capacidades como la identificación de una expresión algebraica como una entidad, el reconocimiento de una expresión algebraica como una estructura previamente conocida, la división o separación de una entidad en subestructuras, el reconocimiento de conexiones mutuas entre estructuras, y la realización de manipulaciones que sean posibles y útiles de efectuar. También, Vega (2010) señala que uno de los componentes del sentido estructural es saber discernir qué transformación es más pertinente de acuerdo con el contexto en que se enmarca una tarea.

Finalmente, se destaca que el sentido estructural es útil cuando se analiza el uso de técnicas algebraicas previamente aprendidas por el estudiantado. Hoch y Dreyfus (2006) y Novotná y Hoch (2008) resaltan que aquellas personas que utilizan sentido estructural cometen menos errores de manipulación al tratar expresiones algebraicas.

A partir de este enfoque, se propone una caracterización operacional de sentido estructural del estudiantado —en este caso de un grupo de docentes de matemática en pre-servicio— por medio de tres descriptores que permiten identificar el uso de sentido estructural (SS, por sus siglas en inglés) en el contexto de la resolución de tareas algebraicas. Estos descriptores se ilustran con algunos ejemplos vinculados con la expresión $x^2 - y^2$, adaptados del trabajo de Vega (2010).

SS1. Cuando se reconoce una estructura familiar en su forma más simple. Por ejemplo, si en la tarea de factorizar $64 - x^2$ se logra reconocer esta expresión como una diferencia de cuadrados y se identifican los factores.

SS2. Cuando se trata con un término compuesto como una sola entidad y se reconoce una estructura familiar en una forma más compleja. En la tarea de factorizar $(x - 2)^4 - (x + 2)^4$

se consideran $(x - 2)^2$ y $(x + 2)^2$ como una sola entidad, se reconocen: la diferencia de cuadrados y los factores correspondientes.

SS3. Cuando se eligen manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura. Si en la tarea de factorizar la expresión $54x^6 y^4 - 24z^8$ se extrae el factor común para obtener $6 \cdot (9x^6 y^4 - 4z^8)$, se identifica la diferencia de cuadrados, se trata a los términos $3x^3 y^2$ y $2z^4$ como entidades simples y se reconoce la diferencia de cuadrados de estas entidades.

Vega (2013) propone una clasificación de descriptores según el grado en que impliquen o no transformaciones o la construcción de expresiones. Primero, los descriptores que no implican transformar, modificar o construir expresiones. Segundo, aquellos que implican construir expresiones total o parcialmente, modificar expresiones o transformar expresiones conservando la estructura interna. Tercero, otros descriptores más generales como leer expresiones algebraicas o bien escribirlas.

Para la transformación de expresiones se definen los siguientes descriptores:

- *Identificación de subestructuras* dentro de una expresión y tratarlas como una sola entidad al transformar la expresión. Por ejemplo, transformar $(x - 2)x + 7(x - 2)$ en $(x - 2)(x + 7)$.
- *Transformación de la estructura externa* de una expresión sin afectar su estructura interna. Por ejemplo, expresar $x^4 - 10x^2 + 25$ como $(x^2 - 5)^2$.
- *Reconocimiento de procesos* empleados en la transformación de una expresión. Por ejemplo, identificar como se puede obtener la expresión $\frac{1}{x-3}$ a partir de la simplificación de $\frac{x^2-6x+9}{(x-3)^2(x-3)}$.
- *Anticipación del efecto de transformaciones* en la estructura de una expresión. Por ejemplo, predecir que la factorización del denominador de la expresión $\frac{3x^2(x+1)}{3x^4+9x^2}$ puede simplificarla.

En este estudio, las consideraciones mostradas constituyen el fundamento para la definición de las categorías y las unidades que se utilizan en el análisis de la información.

2.3. FORMACIÓN DE INICIAL DE DOCENTES DE MATEMÁTICA

Tal como resalta García (2005), la formación de docentes de matemática ha sido objeto de interés para personas investigadoras, formadoras de formadores y profesionales de la enseñanza, cuyos esfuerzos para estudiar las particularidades de este proceso tienen un propósito común: ofrecer una formación completa y adecuada al futuro profesorado. En otras palabras, los centros de formación docente deben adecuar la oferta curricular de manera que el profesorado en pre-servicio mejore y amplíe la comprensión de nociones, concept os, procedimientos y representaciones; desarrolle diversas formas de participación en la comunidad de "profesoras y profesores de matemáticas"; y desarrolle destrezas pedagógicas para su desempeño en la práctica educativa (Llinares, 1999).

Diversas investigaciones han resaltado y caracterizado el conocimiento profesional del profesorado de matemáticas (Ball *et al*., 2008; Carrillo *et al*., 2014; Flores-Medrano *et al*., 2014). En estas se reconoce un conocimiento especializado caracterizado desde dos dominios fundamentales: el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido matemático; complementariamente se explora un dominio basado en actitudes y concepciones hacia las matemáticas.

En la perspectiva que aquí se adopta, interesa el conocimiento del contenido matemático que va desarrollando el profesorado en pre-servicio. Como señala Llinares (2012), "los instrumentos conceptuales permiten poseer unas referencias para identificar lo que puede ser relevante de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas e interpretarlos, lo que condiciona lo que se ve y cómo se ve" (p. 55).

El profesorado de matemáticas, desde su formación, debe mostrar un dominio y comprensión de las matemáticas y sus características, así como de las peculiaridades de su aprendizaje, de manera que pueda enriquecer la enseñanza.

2.3.1. El profesorado de matemáticas en pre-servicio en la Universidad Nacional

En la Universidad Nacional, la formación de docentes de matemáticas en pre-servicio se organiza desde (y para) el fomento y desarrollo de competencias en tres áreas disciplinares: (1) la matemática formal, la matemática aplicada y la estadística; (2) la pedagogía y las didácticas específicas; y (3) la investigación. Complementariamente, se incluyen asignaturas generales, idioma extranjero y asignaturas optativas, que promueven la multidisciplinariedad (Universidad Nacional [UNA], 2017).

Particularmente, la organización curricular para la formación en matemática formal inicia con la asignatura MAC400 Matemática fundamental, que se imparte en el I ciclo del primer nivel de la carrera. Dentro de las competencias matemáticas pretendidas para esta asignatura están: comprender los conceptos básicos de la matemática superior desde una perspectiva universitaria para su formación como docente de matemática y entender los conceptos fundamentales de la matemática a través de su evolución socio-histórica para la comprensión de la disciplina y su enseñanza en diferentes contextos. En esta asignatura se aborda el álgebra como componente del conocimiento del contenido matemático que deberá desarrollar la persona docente en formación inicial, con las adaptaciones requeridas para el fomento de competencias matemáticas y didáctico-matemáticas, consideradas necesarias para su futuro desempeño docente en educación secundaria.

Conceptualmente, el área de álgebra incluye el estudio de operaciones básicas con polinomios, la factorización de polinomios mediante métodos como: factor común, agrupación, fórmulas notables, inspección, fórmula general, completar cuadrados y el teorema del factor, y operaciones con fracciones algebraicas, entre otros temas. Desde un marco general, se pretende que el profesorado en formación logre el desarrollo de capacidades como: efectuar operaciones que involucren expresiones polinomiales; comprender el significado de factorización, conocer, identificar y aplicar cada uno de los métodos de factorización; efectuar operaciones que involucren expresiones fraccionarias algebraicas; y simplificar expresiones algebraicas.

El fomento de estas capacidades, vinculadas al álgebra escolar —aunque con un nivel de complejidad mayor—, procuran una preparación del profesorado en formación en cuanto al conocimiento y la comprensión de contenidos matemáticos (algebraicos), para su aplicación en el diseño y resolución de tareas matemáticas y para la detección y atención de particularidades asociadas al aprendizaje del estudiantado en educación secundaria.

En este artículo interesa el conocimiento del contenido matemático del profesorado de matemáticas en pre-servicio, desde la perspectiva del álgebra y las manifestaciones de sentido estructural al momento de resolver tareas de factorización, abordadas en la asignatura MAC400 Matemática Fundamental, del plan curricular en la Universidad Nacional.

2.3.2. El álgebra escolar para educación secundaria

El currículo de matemáticas para educación primaria y educación secundaria en Costa Rica organiza los contenidos a partir de cinco áreas matemáticas, entre ellas las relaciones y el álgebra (Ministerio de Educación Pública [MEP], 2012). A partir de una preparación temprana del estudiantado en relaciones y conceptos algebraicos desde los primeros seis años de escolaridad (I y II ciclos de la Educación General Básica), esta área conforma un fundamento clave para la segunda enseñanza (III y IV ciclos).

Las relaciones se promueven desde el cambio o la variación mostrada en los datos de situaciones cotidianas que pueden representarse a través de modelos y funciones matemáticas. En cuanto al álgebra, la propuesta curricular sugiere "un tratamiento funcional de la manipulación de expresiones simbólicas o algebraicas" (MEP, 2012, p. 54), con el propósito de otorgar significado a distintos conceptos matemáticos y de fomentar el pensamiento funcional en el estudiantado. De esta manera, el álgebra constituye una herramienta poderosa para representar regularidades y patrones en muchas circunstancias. Por ejemplo, el estudio de las ecuaciones, la factorización de polinomios y la simplificación de expresiones algebraicas potencia los procesos de generalización.

Particularmente, con el estudio del álgebra en los tres primeros años de la educación secundaria (III ciclo) se pretende fortalecer las habilidades para la resolución de ecuaciones de primer grado y para la comprensión del concepto de variable, desarrolladas en la educación primaria. Complementariamente, se proponen actividades para la simbolización y la manipulación matemática de expresiones algebraicas. En este III ciclo se estudian los métodos de factorización, para esto se presentan parejas de técnicas de factorización para que el estudiantado pueda aplicar: (a) factor común y fórmula notable, (b) grupos y factor común, y (c) grupos y diferencia de cuadrados; adicionalmente se aborda la factorización por inspección de un trinomio y la completación de cuadrados. El estudio de estas técnicas se propone como un mecanismo para desarrollar en el estudiantado la habilidad específica de factorizar y simplificar expresiones algebraicas. Por su parte, el ciclo diversificado, que incluye los dos últimos años de la educación secundaria, enfatiza el estudio de las funciones.

De lo anterior se desprende que la propuesta curricular estimula el sentido estructural del estudiantado al inducir habilidades que permitan transformaciones específicas de expresiones algebraicas, para una mejor utilización de las técnicas de factorización y otros procedimientos matemáticos.

3. METODOLOGÍA

El estudio llevado a cabo corresponde a una investigación cualitativa, en el marco de los estudios descriptivos y basado en los estudios de caso en Educación Matemática. Siguiendo a Dankhe (1986), los estudios descriptivos se direccionan hacia la especificación de las propiedades de comunidades, grupos o personas, o de algún fenómeno que sea sometido a un análisis.

Metodológicamente, esta investigación corresponde a un estudio instrumental de casos (Buendía *et al*., 1998). Considerando el propósito general del estudio, se pretende observar, describir e interpretar las características de las manifestaciones de sentido estructural en un grupo de docentes de matemática en pre-servicio, en un momento particular de su proceso de formación profesional.

3.1. DESCRIPCIÓN DE PARTICIPANTES

Las personas participantes del estudio fueron 20 docentes en pre-servicio, de enseñanza de la matemática en la Universidad Nacional (Costa Rica). Esta población informante fue seleccionada a partir de la dinámica desarrollada en la asignatura MAC418 Didáctica del álgebra y el análisis, impartida durante el curso académico 2021. En esta asignatura se presentan y analizan diversas propuestas teóricas sobre el abordaje del álgebra y las relaciones, para su enseñanza y aprendizaje en educación secundaria.

Como criterios de selección se consideró que: (a) las personas informantes debían estar matriculadas en el Plan de estudios de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, implementado en el 2017 (BLEM-2017), (b) haber aprobado la asignatura MAC400 Matemática Fundamental en el curso académico 2017 o 2018, y (c) manifestar disposición para participar en el estudio, mediante la completación del instrumento para la recogida de datos.

El profesorado en formación inicial participante se encuentra en el cuarto nivel de la carrera. Ingresaron a la carrera durante 2017 o 2018, momentos en que cursaron la asignatura MAC400 Matemática Fundamental, que se impartía por primera vez como componente del área disciplinar sobre matemática formal, del plan curricular BLEM-2017. En esta asignatura se desarrollan contenidos sobre álgebra básica, que se enseñan en educación secundaria. De las pruebas aplicadas, como parte de la evaluación, se desprendieron los ítems incluidos en el instrumento de recolección de información. De esta manera, se contó con una población homogénea, en cuanto a las estrategias de mediación y evaluación implementadas durante el desarrollo de esta asignatura. Cada docente participante ha sido identificado con el código DF, seguido de un número, sin que este indique algún orden particular (por ejemplo, DF-01).

3.2. RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Para la recolección de la información se aplicó una prueba corta a las personas participantes, como una evaluación formativa; es decir, no incidía porcentualmente en la calificación del curso por lo que se insistió en la resolución individual y honesta de las tareas. La prueba se aplicó en la modalidad virtual y se dispuso de 60 minutos para su solución.

Las personas docentes debían mostrar todos los procedimientos aplicados y enviar las soluciones como imágenes fotografiadas. La prueba corta constaba de tres ítems de desarrollo, en los que se solicitaba la factorización completa de tres polinomios utilizando distintos métodos de factorización; esto se describe a continuación.

Ítem 1. Mostraba el polinomio $a^3 + 8b^3 - 2a^2b - 4ab^2$. Su factorización incluye métodos como agrupamiento, factor común, suma de cubos y trinomio cuadrado perfecto.

Ítem 2. Presentaba el polinomio $x^4 - 8x^2y^2 + 4y^4$. Para su factorización se implementan los métodos de completación de cuadrados y diferencia de cuadrados.

Ítem 3. Solicitaba la factorización del polinomio $a^4 - 9a^2b^2 - 24ab^3 - 16b^4$. Su resolución incluye la aplicación de los métodos agrupamiento, factor común, trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados e inspección.

3.3. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN: CATEGORÍAS Y PROCESO

La información proporcionada por el profesorado será tratada a partir de categorías fundamentadas en los descriptores de sentido estructural propuestos por Hoch y Dreyfus (2006), y que han sido utilizadas y adaptadas en estudios como Vega (2013), Castellanos y Obando (2017), Jupri y Sispiyati (2017), Ascencio y Eccius-Wellmann (2019) y Bolaños y Segovia (2021). En cada categoría se describen criterios que corresponden a las unidades de análisis, asociados a procedimientos o métodos de factorización de polinomios. Para este estudio, las unidades de análisis han sido definidas con un grado de mayor complejidad, en correspondencia al nivel académico de las personas participantes.

Categoría SS1. Incluye una estructura familiar en su forma más simple. Para este estudio se considera la factorización por los siguientes métodos:

a. Factor común, cuando el factor común es un monomio.
b. Diferencia de cuadrados, cuando los términos del binomio son monomios.
c. Suma de cubos, cuando los términos del binomio son monomios.

Categoría SS2. Refiere al tratamiento de un término compuesto como una sola entidad; se reconoce una estructura familiar en una forma más compleja. Para este estudio se considera la factorización por los siguientes métodos:

a. Factor común, cuando el factor común es un binomio.
b. Agrupamiento.
c. Diferencia de cuadrados, cuando alguno de los términos es un binomio.
d. Trinomio cuadrático por inspección.
e. Trinomio cuadrático perfecto (fórmula notable).

Categoría SS3. Considera diversas manipulaciones para un mejor uso de una estructura. Para este estudio se considera la factorización por los siguientes métodos:

a. Completación de cuadrados o cubos.
b. Combinación de dos o más métodos diferentes.

Para la identificación de peculiaridades en las resoluciones de las personas participantes, asociadas a estas categorías, se presentan procedimientos expertos para cada uno de los ítems y los códigos definidos para el análisis; esta codificación ha sido adaptado de Vega (2010) y se describe como N-PCp (N: número del ítem, PC: realización de un procedimiento correcto, p: número de paso). Resulta conveniente recalcar que estas estrategias no son las únicas maneras de proceder en la resolución de las tareas.

3.3.1. Resolución del ítem 1

Para la resolución de este ítem se proponen tres estrategias caracterizadas por la diferencia entre los pasos a realizar y el orden de los métodos de factorización que se pueden implementar.

- *Estrategia 1*. El procedimiento inicia con la agrupación de términos para obtener una suma de cubos (1-PC1a); se aplica suma de cubos en el primer grupo y factor común en el segundo grupo (1-PC2a); se extrae un factor común binomial en el polinomio (1-PC3a); se suprime el signo de agrupación en el segundo factor (1-PC4a); se reducen términos semejantes (1-PC5a); y se factoriza el segundo factor como trinomio cuadrado perfecto (1-PC6a).
- *Estrategia 2*. El procedimiento inicia con la agrupación de términos para extraer a^2 o b^2 como factor común (1-PC1b); se aplica factor común en cada grupo (1-PC2b); se extrae –1 como factor común del segundo término(1-PC3b); se extrae un factor binomial en el polinomio (1-PC4b); se factoriza el primer factor aplicando diferencia de cuadrados (1-PC5b); y se aplican leyes de potencia (1-PC6b).
- *Estrategia 3*. El procedimiento inicia con la agrupación de términos para extraer a o $2b$ como factor común (1-PC1c); se aplica factor común en cada grupo (1-PC2b); se extrae –1 como factor común del segundo término(1-PC3b); se extrae un factor común binomial en el polinomio (1-PC4b); se factoriza el segundo factor aplicando diferencia de cuadrados (1-PC5b); y se aplican leyes de potencia (1-PC6b).

3.3.2. Resolución del ítem 2

Para la resolución de este ítem se proponen tres estrategias caracterizadas por la diferencia entre los pasos a realizar y el orden de los métodos de factorización que se pueden implementar.

- *Estrategia 1*. El procedimiento empieza con una completación de cuadrados para el polinomio, agregando el término $\pm 4x^2y^2$ (2-PC1a); se agrupan términos para obtener un trinomio cuadrado perfecto incluyendo la expresión $4x^2y^2$ (2-PC2a); fuera del grupo, se reducen los términos semejantes (2-PC3a); se factoriza el grupo por trinomio cuadrado perfecto (2-PC4a); y, finalmente, se factoriza la expresión resultante por diferencia de cuadrados siendo al menos un término un binomio (2-PC5).
- *Estrategia 2*. El procedimiento empieza con una completación de cuadrados para el polinomio, agregando el término $\pm 4x^2y^2$ (2-PC1a); se agrupan términos para obtener un trinomio cuadrado perfecto incluyendo la expresión $-4x^2y^2$ (2-PC2b); fuera del grupo, se reducen los términos semejantes (2-PC3a); se factoriza el grupo por trinomio cuadrado perfecto (2-PC4a); y, finalmente, se factoriza la expresión resultante por diferencia de cuadrados siendo al menos un término un binomio (2-PC5).
- *Estrategia 3*. El procedimiento inicia con una descomposición del término $-8x^2y^2$ como $-4x^2y^2 + -4x^2y^2$ (2-PC1b); se agrupan términos para obtener un trinomio cuadrado perfecto incluyendo la expresión $-4x^2y^2$ (2-PC2b); se factoriza el grupo

por trinomio cuadrado perfecto (2-PC3b); y, se factoriza la expresión resultante por diferencia de cuadrados siendo al menos un término un binomio (2-PC4b).

3.3.3. Resolución del ítem 3

Para la resolución de este ítem se proponen dos estrategias caracterizadas por la diferencia entre los pasos a realizar y el orden de los métodos de factorización que se pueden implementar.

- *Estrategia 1*. El procedimiento inicia con la agrupación de términos para obtener un factor común (3-PC1), en este caso se agrupan tres términos; se extrae el término $-b^2$ como factor común del grupo (3-PC2a); se factoriza el trinomio resultante en el grupo (3-PC3); se aplica el método de diferencia de cuadrados, siendo al menos un término un binomio, para factorizar la expresión (3-PC4); se efectúan las multiplicaciones indicadas (3-PC5); por último, se factoriza por inspección uno de los factores obtenidos (3-PC6).
- *Estrategia 2*. El procedimiento empieza con la agrupación de términos para obtener un factor común (3-PC1),en este caso se agrupan tres términos; se extrae el coeficiente numérico -1 como factor común del grupo (3-PC2b); se factoriza el trinomio resultante en el grupo (3-PC3); se aplica el método de diferencia de cuadrados, siendo al menos un término un binomio, para factorizar la expresión (3-PC4); se efectúan las multiplicaciones indicadas (3-PC5); por último, se factoriza por inspección uno de los factores obtenidos (3-PC6).

En el apartado siguiente se presentan las especificidades del proceso de análisis y los resultados obtenidos de este.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

La información recolectada pone en evidencia una serie de particularidades en cuanto a la manifestación del sentido estructural, en las estrategias que implementan las personas participantes para la resolución de los ítems propuestos. La tabla 1 destaca la frecuencia con que se muestran las unidades de análisis en cada una de las categorías consideradas.

Tabla 1. Manifestaciones de sentido estructural en las resoluciones de los ítems

Categoría	SS1			SS2					SS3	
	a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*a*	*b*
Ítem 1	20	8	8	20	20	-	-	8	1	20
Ítem 2	-	-	-	-	12	12	-	12	11	13
Ítem 3	12	3	-	-	20	14	8	15	-	20

Nota. SS=Sentido estructural.

En lo que sigue se describen las particularidades identificadas en las estrategias que se asocian a las tres categorías de análisis.

4.1. FACTORIZACIÓN DE UNA ESTRUCTURA SIMPLE

La categoría SS1 corresponde a estructuras familiares para el profesorado de matemática en pre-servicio; en este caso, refiere al uso de factor común, la diferencia de cuadrados y la suma de cubos como estrategias para la factorización de polinomios, que involucran únicamente términos monomiales.

Las resoluciones del ítem 1 muestran que la totalidad de las personas participantes reconocen un monomio como factor común en la expresión polinomial dada. No obstante, esta situación es distinta al momento de aplicar diferencia de cuadrados o la suma de cubos, ya que solo ocho participantes lo evidencian en cada caso. La figura 1 ejemplifica uno de estos ocho casos.

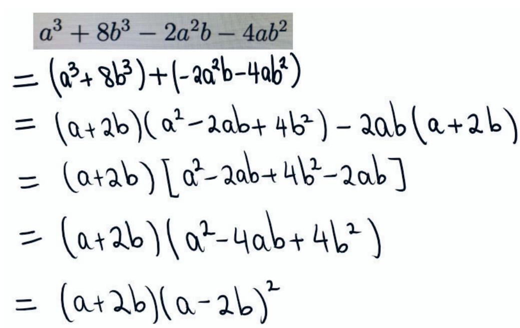

Figura 1. Resolución de DF-05 para el ítem 1.

En el ítem 3, los procedimientos de resolución exponen una disminución en la cantidad de participantes que identifican el factor común monomial o la diferencia de cuadrados. En el primer caso, esto podría deberse al tipo de agrupamiento que preliminarmente debía realizarse para definir el término común (agrupar tres términos); en cuanto al segundo caso, DF-02, DF-04 y DF-14 realizan agrupaciones incorrectas que los conducen a una diferencia de cuadrados monomial, no considerada en la resolución, que efectúan correctamente (figura 2).

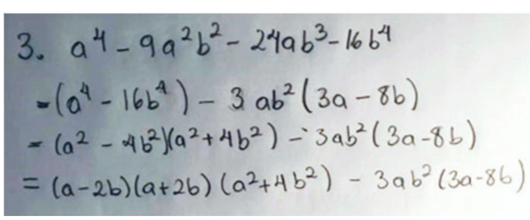

Figura 2. Resolución de DF-02 para el ítem 3.

En síntesis, el profesorado en formación manifiesta fortalezas en el reconocimiento de monomios como factor común, y limitaciones al aplicar la estructura de fórmulas notables como la diferencia de cuadrados y la suma de cubos, durante la factorización de expresiones con términos monomiales.

4.2. FACTORIZACIÓN DE UNA ESTRUCTURA COMPUESTA

En cuanto a la categoría SS2, esta refiere al trabajo con estructuras familiares, pero con términos compuestos; es decir, con expresiones algebraicas binomiales. Aquí, el grado de complejidad para la resolución de la tarea aumenta. Se ha considerado la aplicación de métodos de factorización por factor común, agrupamiento, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrático (por inspección) y trinomio cuadrático perfecto (fórmula notable).

En el ítem 1, la resolución involucraba el uso de factor común, agrupación y trinomio cuadrático perfecto como proceso de factorización del polinomio. Particularmente, la totalidad de las personas participantes implementan el agrupamiento y reconocen un binomio como factor común.

Una vez obtenida una factorización preliminar del polinomio, ocho participantes logran identificar y factorizar el trinomio cuadrático perfecto obtenido en uno de los factores; por ejemplo, la figura 3 muestra la resolución de DF-14.

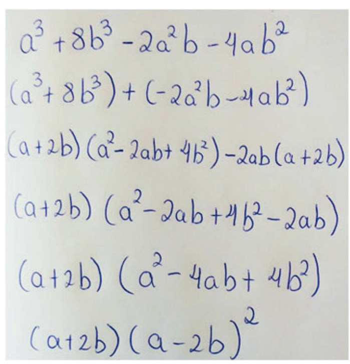

Figura 3. Resolución de DF-14 para el ítem 1.

Por su parte, once participantes no incluyen la factorización del trinomio cuadrático perfecto, pues realizan otro tipo de agrupamiento de términos y de factor común que los conduce a obtener solo factores binomiales (figura 4).

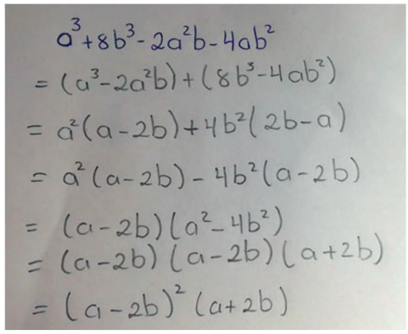

Figura 4. Resolución de DF-13 para el ítem 1.

Cabe destacar la resolución de DF-02, quien completa términos para agrupar y obtener el cubo de una suma, luego aplica factor común hasta reconocer un factor común binomial; no obstante, al final de la resolución, omite el desarrollo de una fórmula que le condujera al trinomio cuadrático perfecto (figura 5). Esta resolución sobresale por el uso de manipulaciones algebraicas alternativas para la factorización del polinomio.

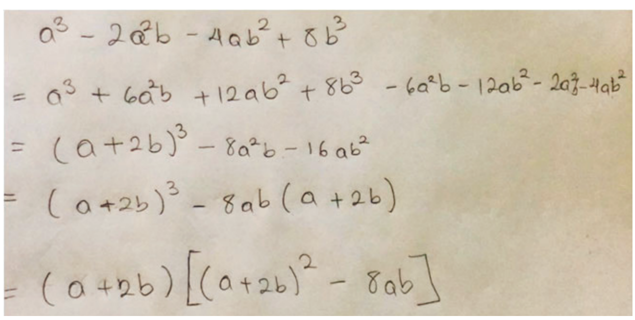

Figura 5. Resolución de DF-02 para el ítem 1.

Según la resolución experta, las resoluciones del ítem 2, para la categoría SS2, involucraban el uso de agrupamiento, diferencia de cuadrados y trinomio cuadrático perfecto en el proceso de factorización. De las personas docentes participantes, 13 utilizaron las tres estrategias en la resolución del ítem; DF-05 y DF-07 implementaron agrupamiento y factorizaron el trinomio cuadrático perfecto, la diferencia de cuadrados que efectúan al final presenta un error en la asignación de exponentes de los términos. Por su parte, DF-14 efectúa de manera correcta la diferencia de cuadrados, a pesar de los errores previos cometidos al resolver el ítem. Finalmente, seis participantes no utilizan las estrategias esperadas para la resolución del ítem, y efectúan procedimientos incorrectos sin fundamento matemático (figura 6).

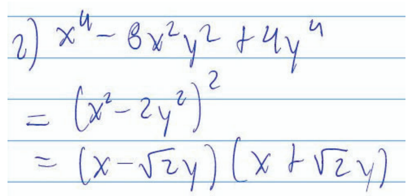

Figura 6. Resolución de DF-02 para el ítem 1.

Para la resolución del ítem 3 se aplican el agrupamiento, la diferencia de cuadrados, la inspección y el trinomio cuadrado perfecto como estrategias de factorización con términos binomiales. En este caso, 15 participantes implementaron el agrupamiento de tres términos como primer método de factorización, un paso necesario y correcto para iniciar la resolución. Los restantes cinco implementaron una agrupación errónea de dos términos; por ejemplo, DF-02 realizó agrupaciones en parejas de términos para procurar una diferencia de cuadrados en uno de los grupos, no obstante, este procedimiento le impide avanzar (figura 7).

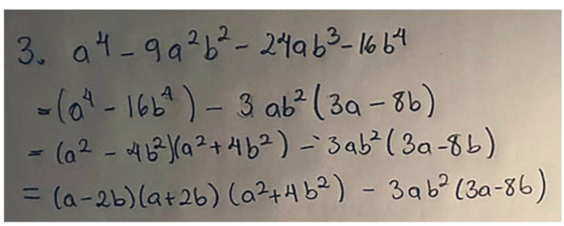

Figura 7. Resolución de DF-02 para el ítem 1.

Dentro del grupo de personas con una agrupación correcta, se identifican ocho personas que aplicaron los otros tres métodos; es decir, resolvieron el ítem de la manera esperada. Por su parte, siete participantes culminan la resolución sin aplicar el método de inspección para factorizar el trinomio cuadrático que resulta en uno de los factores. Por ejemplo, DF-08 omite una distribución en el primer factor obtenido que le impide reconocer un trinomio cuadrático (figura 8).

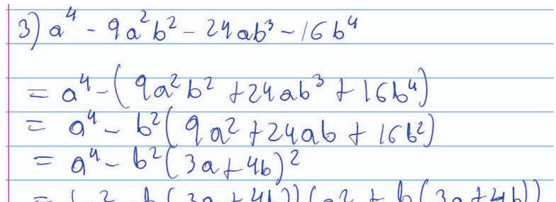

Figura 8. Resolución de DF-08 para el ítem 3.

En resumen, las producciones analizadas para esta categoría muestran que el profesorado en formación intuye la necesidad de agrupar términos para iniciar la factorización. A pesar de esto, para un grupo reducido de participantes esta agrupación se dificulta cuando se trata de agrupar tres términos en un polinomio de cuatro términos, aunado a que el error cometido no les conduce a reformular la agrupación.

Otra fortaleza reconocida es la aplicación de la diferencia de cuadrados, el factor común y el trinomio cuadrático perfecto, como estrategia de factorización con términos binomiales. Sin embargo, se evidencian dos razones que limitan el uso de la inspección: errores en operaciones algebraicas y falta de reconocimiento de un trinomio cuadrático factorizable.

4.3. FACTORIZACIÓN BASADA EN MANIPULACIONES DIVERSAS

En la categoría SS3 se pretende la implementación de diversas manipulaciones para un uso adecuado de la estructura. Se incluyen métodos de factorización como la completación de cuadrados o cubos y la combinación de diversos métodos.

Particularmente en el ítem 1, la resolución esperada incluía la combinación de métodos como estrategia de factorización. Esto fue efectuado por la totalidad de las personas participantes. Cabe destacar que DF-02 utiliza la completación del polinomio para obtener la equivalencia del cubo de una suma, como parte de su resolución (figura 9); a pesar de que el procedimiento está incompleto, se reconoce un mayor sentido estructural en DF-02 desde la categoría SS3, respecto al resto de participantes.

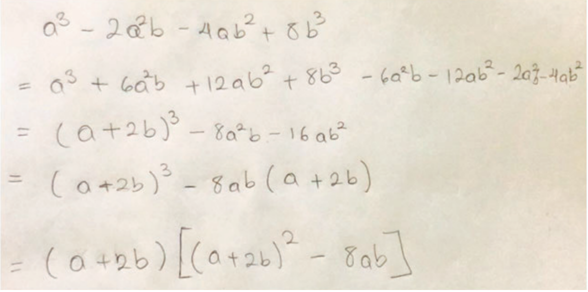

Figura 9. Resolución de DF-02 para el ítem 1.

La resolución del ítem 2 requería la completación de cuadrados, junto con la aplicación de otros métodos como estrategias de factorización. De las personas participantes, once implementaron la completación de cuadrados de manera correcta; por su parte, DF-06 y DF-07 utilizaron otros métodos de factorización para resolver el ítem. Los siete participantes restantes muestran errores diversos en sus resoluciones. Por ejemplo, DF-02 y DF-14 (figura 10) a pesar de que transcriben de manera incorrecta el ítem, reconocen la completación de cuadrados como método necesario para factorizar el polinomio, sin embargo, los términos utilizados para este fin no son los correctos (la descomposición de $-8x^2y^2$ es incorrecta); DF-01, DF-03 y DF-09 no reconocen la completación de cuadrados y efectúan una agrupación incorrecta; DF-08 y DF-10 confunden el polinomio con un trinomio cuadrático perfecto.

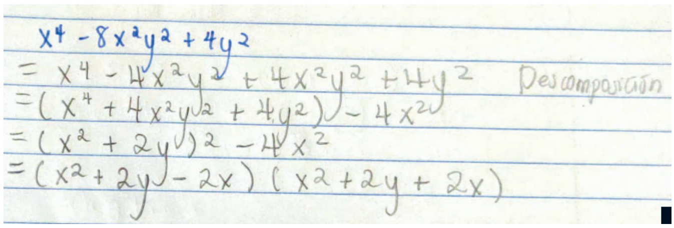

Figura 10. Resolución de DF-14 para el ítem 2.

Finalmente, en cuanto al ítem 3, todas las personas docentes participantes aplican al menos dos métodos de factorización. Ahora bien, de estas, ocho realizan de manera completa y correcta la factorización; siete participantes efectúan correctamente la mayor parte del procedimiento esperado, pero sin llegar a la factorización completa del polinomio; y cinco participantes realizan un procedimiento incorrecto, pero manifiestan la intención de implementar dos métodos de factorización, como agrupación, factor común o diferencia de cuadrados. Sin dejar de lado las especificidades descritas, las personas docentes en formación que participaron en el estudio, manifiestan un sentido estructural caracterizado por la manipulación de los polinomios, a través del uso de diversos métodos de factorización.

Desde una perspectiva didáctica, el estudio ha puesto de manifiesto una serie de fortalezas y debilidades en el conocimiento matemático del grupo de profesores en pre-servicio participantes, que caracterizan su sentido estructural desde las categorías planteadas.

Siguiendo a Gairín (2011), “la determinación del perfil profesional de una titulación define su identidad [del docente] y nos orienta sobre la naturaleza de los aprendizajes que deben ser priorizados para que el profesional sea competente en su actividad” (p. 99). De esto, el docente de matemáticas tiene que saber matemáticas, por lo que resulta conveniente ejecutar acciones en el proceso de su formación que incidan positivamente en las debilidades matemáticas reconocidas.

La investigación redirecciona el interés hacia la toma de decisiones sobre los procesos de formación de docentes de matemáticas y su propuesta curricular, de modo que se acentúen y atiendan explícitamente las expresiones algebraicas desde la especificidad de los niveles del sentido estructural. Cuando el estudiante presenta un sentido estructural desarrollado, será capaz de resolver tareas algebraicas con más eficiencia y disminuyendo la cantidad de errores (Vázquez et al., 2021). Consideramos que, un docente de matemáticas con alto sentido estructural se inclinará hacia la implementación de experiencias didácticas que promuevan el análisis y la comprensión de expresiones algebraicas, es decir, hacia el fortalecimiento del razonamiento estructural del estudiantado.

5. CONCLUSIONES

El estudio se ha dirigido a la identificación y el análisis de particularidades en los procedimientos mostrados por un grupo de docentes de matemática en pre-servicio, cuando resuelven tareas algebraicas sobre factorización de polinomios, como indicadores de sentido estructural en estas personas.

El sentido estructural, que se manifiesta cuando el profesorado en pre-servicio manipula estructuras familiares en su *forma más simple*, se caracteriza por un uso de estrategias de factorización básicas, centradas fundamentalmente en la identificación de un monomio como factor común. Cuando se requiere la manipulación de expresiones polinomiales que son factorizables mediante las fórmulas notables (en este caso la diferencia de cuadrados y la suma de cubos), se reconocen limitaciones conceptuales y procedimentales que evidencian una escasa comprensión de estos métodos de factorización.

La resolución de la tarea que involucra una estructura familiar con *términos compuestos*, esto es, con expresiones algebraicas binomiales, pone de manifiesto que el profesorado reconoce la necesidad de implementar el método de agrupación. Sin embargo, en su mayoría las agrupaciones realizadas impiden avanzar en el procedimiento de la factorización; la tendencia es agrupar parejas de términos, sin llegar a un análisis de la estructura polinomial que conduzca a agrupaciones de tres términos para la aplicación de fórmulas notables. Aunado a esto, se reconocen manifestaciones del uso de los métodos de factor común y fórmulas notables particularmente la diferencia de cuadrados y, en menor medida, el trinomio cuadrático perfecto, como componentes de la estrategia para la factorización del polinomio.

Lo expuesto revela un uso mecánico de métodos de factorización carente de análisis y reflexión de las estructuras algebraicas que conforman los polinomios. Esto concuerda con Olfos *et al*. (2007) quienes acentúan el uso de pensamientos reproductivos y no de orden superior en la resolución de tareas algebraicas. Particularmente, las tareas que involucran operaciones con expresiones algebraicas carecen de significado para el estudiantado, y se conciben desvinculadas de un contexto real, de procesos de modelación o de formas de pensamiento matemático. Por su parte, Mejía (2004) establece que, para la factorización de polinomios, la enseñanza de reglas mediante la resolución de tareas similares conduce a un aprendizaje memorístico de algoritmos, y a una falta de interpretación y comprensión significativa de propiedades y transformaciones posibles con objetos matemáticos: “Un tratamiento poco significativo [de reglas], que impide entender las razones que hacen lícitas o no lícitas las transformaciones de expresiones algebraicas” (p. 7).

Además, las resoluciones de la tarea algebraica, que requerían *manipulaciones diversas* en la estructura del polinomio para su factorización, dejan ver que las personas docentes en pre-servicio identifican la combinación de métodos de factorización como componente de su estrategia de resolución de la tarea. Por su parte, se reconoce una carencia y diversas dificultades en cuanto a la aplicación de métodos de factorización con una complejidad mayor, como la completación de cuadrados y de cubos, respecto a los otros métodos expuestos.

El análisis realizado permite identificar fortalezas en el sentido estructural de las personas participantes cuando resuelven tareas con estructuras familiares. Asimismo, emergen debilidades en su sentido estructural cuando se enfrentan a tareas con estructuras compuestas, que se intensifican al enfrentarse a tareas que conllevan el uso de manipulaciones diversas en las estructuras algebraicas.

Complementariamente, el estudio ha permitido la identificación de errores en las resoluciones de las tareas propuestas, relacionadas con la factorización de polinomios. Se destaca: la factorización incompleta de los polinomios, el uso incorrecto de signos, incorrectas agrupaciones de términos, errores en operaciones y de escritura, y fallos en la identificación de polinomios y de sus términos.

Desde una perspectiva general, en concordancia con Movshovitz-Hadar *et al*. (1987), los desaciertos señalados se consideran como errores técnicos que se asocian a fallos en cálculos, a manipulaciones algebraicas incorrectas, entre otros. Particularmente, los errores señalados pueden clasificarse según la categorización propuesta por García (2010); de esta se destacan: errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas, procedimiento inconcluso, procedimientos incorrectos e inferencias no válidas, y asociación incorrecta de productos notables.

Siguiendo a Rodríguez-Alveal *et al*. (2019), las instituciones formadoras de docentes de matemática deben enfrentar los desafíos curriculares producto de las reformas educativas en matemáticas. Desde este marco, el estudio llevado a cabo conduce a una reflexión sobre la necesidad de fortalecer el desarrollo del conocimiento del contenido matemático del profesorado en formación inicial, particularmente el sentido estructural, como un mecanismo para que cuando las personas docentes en pre-servicio se desempeñen profesionalmente, puedan atender las disposiciones para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en Costa Rica. Para esto, también resulta recomendable: (a) profundizar en el estudio de los errores manifestados y su incidencia en el desarrollo del sentido estructural del profesorado participante, y (b) ampliar la investigación a toda la población de docentes de matemática en pre-servicio, con el propósito de identificar estas u otras debilidades o limitaciones que requieran ser atendidas en el proceso de formación profesional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ascencio, R. y Eccius-Wellmann, C. (2019). Desarrollo del sentido estructural en alumnos universitarios mediante el uso de la Teoría de la Variación en el manejo de expresiones algebraicas racionales. *Educación Matemática, 31*(2), 161-194. DOI: 10.24844/EM3102.07

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, (59), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bolaños, M. y Segovia, I. (2021). Sentido estructural de los estudiantes de primer curso universitario. *Uniciencia*, *35*(1), 152-168. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.10

Buendía, L., Colás, M. P. y Fuensanta, P. (1998). *Métodos de Investigación en Psicopedagogía*. McGraw-Hill.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. A. (Eds.). (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.

Castellanos, M. T. y Obando, J. A. (2017). El rol de las dificultades del aprendizaje algebraico ligado al desempeño del sentido estructural en estudiantes de grado octavo. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Eds.), *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Volumen CB-1 (pp. 191-201). FESMP.

Castro, E., Cañadas, M. C. y del Río, A. (2018). *La estructura en la base del conocimiento aritmético y algebraico* [Documento no publicado]. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Dankhe, G. L. (1986). *La comunicación humana: ciencia social*. Mc Graw Hill.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, M., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemática, el MTSK. En J. Carrillo, L. C. Contreras-González, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M. A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemática* (pp. 70-92). Universidad de Huelva Publicaciones.

Gairín, J. (2011). Formación de profesores basada en competencias. *Bordón, 63*(1), 93-108.

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura* [Tesis de maestría, Universidad de Granada]. https://fqm193.ugr.es/seccion_libre/trabajos-fin-de-mster/

García, M. M. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación matemática*, *17*(2), 153-166.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56). Bergen University College. http://emis.muni.cz/proceedings/PME28/RR/RR025_Hoch.pdf

______. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). Charles University in Prague. https://eric.ed.gov/?id=ED496933

Jupri, A. y Sispiyati, R. (2017). Expert strategies in solving algebraic structure sense problems: The case of quadratic equations. *Journal of Physics: Conference Series*, *812*, 012093. doi:10.1088/1742-6596/812/1/012093

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), 229-240.

Linchevski, L. y Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(2), 173-196. https://doi.org/10.1023/A:1003606308064

Livneh, D. y Linchevski, L. (2007). Algebrification of arithmetic: Developing algebraic structure sense in the context of arithmetic. En J. Woo, H. Lew, K. Park y D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 217-225). The Korea Society of Educational Studies in Mathematics. https://www.emis.de/proceedings/PME31/3/217.pdf

Llinares, S. (1999). Preservice Elementary Teachers and Learning to Teach Mathematics. En N. Ellerton (Ed.), *Mathematics Teacher Development: International Perspectives* (pp. 107-119). Meridian Press.

______. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 7*(10), 53-62. http://funes.uniandes.edu.co/21400/1/Llinares2012Formacion.pdf

Mejía, M. (2004). *Análisis didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas* [Tesis de Licenciatura, Universidad del Valle]. http://funes.uniandes.edu.co/1761/

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de la Educación General Básica y Educación Diversificada*. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in mathematics Education*, *18*(1) 3-14.

Novotná, J. y Hoch, M. (2008). How Structure sense for algebraic expression or equations is related to structure sense for abstract algebra. Mathematics Education Research Journal, 20(2), 93-104. 10.1007/BF03217479

Olfos, R. Soto, D. y Silva, H. (2007). Renovación de la enseñanza del álgebra elemental: un aporte desde la didáctica. *Estudios Pedagógicos*, *33*(2), 81-100. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052007000200005

Rodríguez-Alveal, F., Vásquez, C. y Rojas, F. (2019). Formación inicial de docentes en profesores de matemática: una mirada desde la evaluación nacional diagnóstica. *Estudios Pedagógicos*, *45*(2), 141-153. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052019000200141

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Horsori.

______. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 19-52). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2696955

______. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 77*, 5-34.

Universidad Nacional (2017). *Plan de estudios de la Carrera de Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática*. Escuela de Matemática de la Universidad Nacional.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K–12* (pp. 8-19). National Council of Teachers of Mathematics.

Vázquez Montaño, A. E., Hernández Garciadiego, C. y Ramírez Granados, L. (2021). Desarrollo de sentido estructural algebraico en alumnos de bachillerato. *PädiUAQ, 4*(8), 13–21. https://revistas.uaq.mx/index.php/padi/article/view/151

Vega, D. (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables* [Tesis de maestría, Universidad de Granada]. https://fqm193.ugr.es/seccion_libre/trabajos-fin-de-mster/

______. (2013). *Perfiles de alumnos de educación secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. https://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7478/