Estudios Pedagógicos XXXIII, Nº 2: 81-100, 2007
DOI: 10.4067/S0718-07052007000200005

INVESTIGACIONES

*RENOVACION DE LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA ELEMENTAL: UN APORTE DESDE LA DIDACTICA**

Elementary algebra teaching renovation: a contribution from the didactic

Raimundo Olfos Ayarza[1], *Daniela Soto Soto*[2] *y Héctor Silva Crocci*[3]

Instituto de Matemáticas, *Pontificia Universidad Católica de Valparaíso*. Av. Blanco Viel 596, Cerro Barón, Valparaíso, Chile. E-mail: raimundo.olfos@ucv.cl[1], dani1064@hotmail.com[2], janofeliz@hotmail.com[3]

Resumen

Este escrito destaca la baja calidad de la enseñanza actual del álgebra elemental y muestra la factibilidad de su renovación sustentada en la didáctica como disciplina de base. En ese contexto, describe el apoyo otorgado a dos profesoras en la preparación y conducción de actividades de clases que favorecen en sus alumnos el funcionamiento de un pensamiento de orden superior y una comprensión profunda del álgebra elemental, conforme a las metas de los programas de estudio. El escrito finaliza con la caracterización del efecto de la estrategia de apoyo en el aprendizaje de los alumnos y la descripción del efecto de la experiencia en la percepción de las profesoras sobre el mejoramiento de sus habilidades y conocimientos en la didáctica del álgebra elemental.

Palabras clave: didáctica de las matemáticas, álgebra elemental, innovación curricular, formación continua, prácticas de enseñanza, base de conocimientos para enseñar.

Abstract

This paper emphasizes low quality of the present elementary algebra education and shows the feasibility of its renovation sustained in the Didactics as base discipline. In this context, it describes the support offered to two teachers on the lessons preparation and management that favor their students higher order thinking and deep understanding of elementary algebra, according to curricular goals. The paper ends with the characterization of the effect of the strategy to support students learning, and the description of the effect of the experience in the teachers perception about the improvement of their abilities and knowledge in the Didactics of elementary algebra.

Key words: didactic of mathematics, elementary algebra, curricular innovation, continuing education, teaching practices, knowledge base for teaching.

---

* Artículo elaborado en el marco de investigación financiada por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Código 124.707/2006. El informe fue postulado para su presentación en el "XIX Encuentro Nacional de Investigadores en educación", 14-16 de noviembre de 2007, Santiago, Chile.

DIAGNOSTICO Y PROBLEMATIZACION

Más allá de las iniciativas públicas y privadas implementadas en los últimos 20 años, la enseñanza de la matemática continúa con graves deficiencias en Chile. En particular, los profesores enseñan el álgebra inicial siguiendo una tradición centrada en la manipulación mecánica de símbolos (Olfos 2005). Típicamente los alumnos aprenden a operar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones de primer grado, sin que estas tareas tengan significación para ellos o las vinculen a problemas de contexto real, o las relacionen con procesos de modelación o sirvan de acercamiento a formas de pensamiento matemático de tipo inductivo, argumentativo, conjetural o demostrativo. El aprendizaje tradicional del álgebra elemental no se ajusta a las necesidades de una sociedad moderna en la cual las máquinas hacen los procesos rutinarios y las personas toman decisiones, analizan fallos y se preparan para las innovaciones.

Este fenómeno de una enseñanza de baja calidad también se da en ciencias. Pasmanik y Cerón (2005) muestran que las demandas intelectuales de las tareas de aprendizaje contempladas en las clases de química en primero medio son bajas. Las tareas demandan una aplicación restringida y no una reflexión que trascienda el contexto. Las clases corresponden a una *Instrucción Tradicional*, según la denominación de Arievitch y Stetsenko (2000), en la que el profesor presenta y explica la tarea, presenta y explica las reglas generales para la solución del problema, apoyándose en un ejemplo tipo, y el alumnado después debe memorizarlas y practicarlas en la resolución de problemas típicos. Pasmanik y Cerón (2005) infieren que las bajas demandas a los alumnos podrían estar influidas por las creencias de la profesora acerca de los alumnos y por la gran cantidad de alumnos en la sala de clases. Señalan, por ejemplo, que el trabajo cooperativo demanda de espacio físico y que las actividades de debate tampoco son posibles en grupos numerosos, citando a autores como De Corte (2000) y Doherty *et al*. (2002).

En general la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas son de bajo nivel cognitivo en nuestro país. Usualmente se ponen en juego pensamientos reproductivos y no de orden superior, como, por ejemplo, sugiere Fisher (2005) desafiando a los niños con actividades que los lleven al análisis de información, a razonar, a investigar a pensar creativamente o a evaluar.

El programa de estudio en Matemáticas de primero medio (MINEDUC 1998b) presenta dos unidades referidas al álgebra, “lenguaje algebraico” y “factores y productos”. Ambas unidades fueron diseñadas proveyendo ideas modernistas. La unidad “lenguaje algebraico” plantea cuatro núcleos temáticos, de los cuales, los dos primeros muestran el álgebra como un lenguaje, con su dominio semántico y sintáctico. Las letras son presentadas como incógnitas, como números generalizados, como magnitudes arbitrarias y finalmente como variables. El programa sugiere que las letras no sólo hagan referencia a cantidades discretas sino también a magnitudes en fórmulas como en el caso del área de una región rectangular, poniendo de manifiesto la conveniencia de que el profesor incorpore la visualización para facilitar al alumno la comprensión y ofrecerle un contexto significativo con respecto al lenguaje algebraico. El tercer núcleo presenta las ecuaciones de primer grado, no en el marco del anillo entero Z, sino a partir de situaciones en contexto, como los problemas que dieron origen a las ecuaciones en la antigüedad. Este enfoque deja en claro que se trata de la enseñanza de una matemática útil para todo el mundo y que cumple una función en la sociedad. El programa propone partir de las situaciones problemas a las ecuaciones y no de las ecuaciones a los problemas verbales como es propuesto en los textos tradicionales y lo siguen haciendo los profesores según se observa en distintos registros: videos de clases, cuadernos de alumnos, guías de ejercicios preparadas por los profesores y textos escolares elegidos por los docentes para usarlos en sus clases (Olfos 2004). El cuarto y último núcleo sobre demostraciones muestra la esencia de la matemática como ciencia formal y no ciencia empírica. Da al profesor la posibilidad de mostrar que la validez en matemáticas reside en los procesos deductivos basados en datos o bien axiomas.

Pese a que el Marco Curricular (MINEDUC 1998a) y los Programas de estudio (MINEDUC 1998b) requieren de los profesores de matemáticas una enseñanza "modernista", ellos insisten en una "tradicional", como la organizada en el texto de álgebra de Aurelio Baldor (1999) de la década de 1940. Cabe la interrogante, ¿por qué los profesores no se apropian del espíritu de la Reforma y no implementan las clases conforme a la misma? ¿En qué ha fallado la implementación de la Reforma, los cursos de apropiación curricular y el Programa de Perfeccionamiento Fundamental a los docentes?

En parte la respuesta a estas interrogantes obedece a que los profesores están sujetos a un entramado de condiciones que limitan sus actuaciones; condiciones como la reacción de sus alumnos frente a su actuación en el aula, el éxito de sus alumnos en pruebas estandarizadas, la aceptación de su trabajo por parte de la comunidad, esto es, sus pares, los apoderados, los directivos y sostenedores. Un condicionamiento fuerte, por ejemplo, proviene de la forma en que se administra y financia la educación en nuestro país: con el objeto de masificar la educación en los años 60 a 80 se contrató a los profesores para atender cursos masivos y asumir un gran número de horas de clases frente a curso. A partir de los años 90 el foco fue la inversión, el gasto en educación en el país pasó del 3,8% del PIB en 1990 al 7,1% en el 2003 (Marcel y Tokman 2005), los profesores mejoraron su poder adquisitivo pero no cambiaron sus condiciones de trabajo, y persisten las evidencias de un estancamiento de la calidad de la educación expresada en términos de los aprendizajes que alcanzan los alumnos. La realidad chilena muestra que los profesores no cambian sus formas de trabajo en el contexto de la tradición imperante y las formas contractuales actuales. El mejoramiento de la calidad de la enseñanza, como queda de manifiesto en experiencias exitosas en otros países (Isoda *et al.*, en prensa), requiere de profesores reflexivos, que evalúen y modifiquen sus prácticas y, en consecuencia, dediquen tiempo para preparar sus clases.

Ferrada y Villena (2005), en un estudio de casos, identifican en los profesores de matemáticas una autonomía profesional declarativa, a nivel de discurso en contextos libres de coerciones, ejemplificándola con un profesor que en reunión de departamento dice "...somos los especialistas y determinamos el priorizar y profundizar un contenido sobre los otros; somos nosotros los que decidimos, no el jefe de UTP o la reforma". Sin embargo, muestran cómo esta seguridad avalada en su saber disciplinar se pierde a nivel operativo cuando reconoce la sujeción a los reglamentos: "Hay un ensayo del SIMCE y estamos solicitando a los que tienen clase en la tarde que se queden. Los reglamentos vienen del Ministerio, nosotros sólo tenemos que llevarlo a cabo ...". Ferrada y Villena (2005) concluyen que las disciplinas como matemática, al ser la cara visible de la "calidad de los aprendizajes" institucionales, reciben constantes presiones de las pruebas SIMCE y PSU, que determinan ranking y estatus, y de los padres y apoderados, que exigen rendimiento en ese tipo de pruebas que determinan el futuro profesional de los estudiantes. Esta situación fortalece actitudes de dependencia del profesor a un sistema jerarquizado de carácter técnico y a un quehacer docente centrado en preguntas sobre qué enseñar y en qué momentos hacerlo y no en el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje al interior de la disciplina; desperfilándose su rol de profesional autónomo.

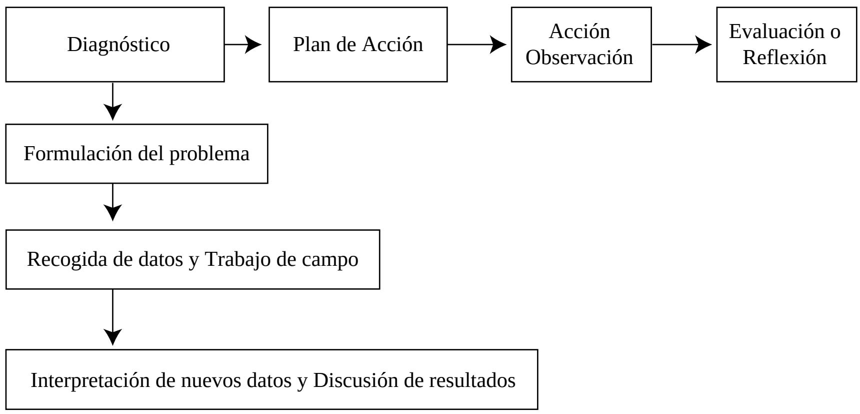
FASE DE PLANEAMIENTO

Revisiones en la literatura: Ya hace un cuarto de siglo, Shön (1983) afirmaba que la formación de profesores basada en la práctica reflexiva abriría camino ante el agotado sistema de cursos que han intentado mejorar la formación continua de los profesores con muchos años de docencia. La opción formativa de la práctica reflexiva se basa en el trabajo en grupo de docentes dirigidos por un experto que promueve la reflexión a partir de la experiencia docente. En el mundo real de la práctica docente, los profesores deben identificar los problemas, conceptuarlos y en este proceso reflexivo sobre la práctica han de participar para buscar soluciones. El profesor como investigador en el aula, según la visión de Stenhouse (1988), ha de planear y tomar decisiones en la misma clase sobre los procesos de enseñanza. La adecuación de estos postulados queda en evidencia, por ejemplo, con el exitoso estilo de clase de matemática desarrollado en Japón (Isoda *et al.*, en prensa). En la actualidad se reconoce internacionalmente que el profesor, además de poseer un buen dominio de la disciplina que enseña, requiere desarrollar un conocimiento epistemológico o didáctico de la misma. Esto es, un saber acerca de los conocimientos que ponen en juego los alumnos, un saber acerca de los obstáculos y errores que enfrentan los alumnos, y un saber del profesor acerca de los aspectos del conocimiento disciplinario que afectan la gestión de su clase. Estos saberes que han emergido a partir de estudio de la enseñanza, atendiendo tanto a la realidad del profesor en su institución como al alumno y al conocimiento a enseñar fue denominado por Brousseau (1986) como didáctica. En la literatura anglosajona este conocimiento didáctico se identifica como “pedagogical content knowledge” (Shulman 1987), diferenciándolo del “content knowledge” y del “pedagogical knowledge”. Ya hace dos décadas, Shulman (1987) hacía notar que el estudio de la comprensión de los contenidos a enseñar por parte de los profesores y la relación entre tal comprensión y su práctica instruccional era un paradigma faltante en la investigación sobre la enseñanza. Middleton y Blumenfeld (2000) recogieron evidencias de que las capacidades necesarias para enseñar bien ciencias y para el desarrollo profesional de los profesores son más bien dependientes de los contenidos específicos que genéricas.

Para investigar y producir cambios en torno a las prácticas instruccionales concretas de los profesores y en torno al conocimiento teórico de la problemática se muestra propicia la investigación-acción, la cual se inicia con el problema contextualizado, la constitución de un equipo de investigadores y la delimitación de marco teórico, Luego, se establece contacto con los actores, en este caso profesores, con quienes se comparte la mirada al problema. Teniendo como antecedente un diagnósico global, se establece el plan de acción para atender las necesidades locales de los profesores participantes, se ejecuta el plan, se reflexiona sobre ese quehacer y se evalúa el impacto. La investigación-acción, articula la dimensión teórica con la práctica, atendiendo la problemática desde esa perspectiva bidimensional.

Figura 1

Organización práctica y teórica de la investigación-acción, esquema tomado de Colas (1994: 297)



Especificaciones de la Investigación: En esta ocasión se constituyó un grupo de investigación en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso en torno a la problemática de la didáctica del álgebra escolar, conformado por un doctor en educación experimentado en formación de profesores de matemáticas y tres ayudantes de investigación, siendo dos de ellos además profesores de aula. El grupo asumió la existencia de conocimientos didácticos situados, que al ponerlos en juego el profesor, llevan al alumno a involucrarse en una actividad cognitiva que disminuiría la distancia entre los aprendizajes establecidos en los programas de estudio que favorecen el pensamiento de orden superiores y los aprendizajes que usualmente abordan los profesores en las aulas centrados en el pensamiento reproductivo.

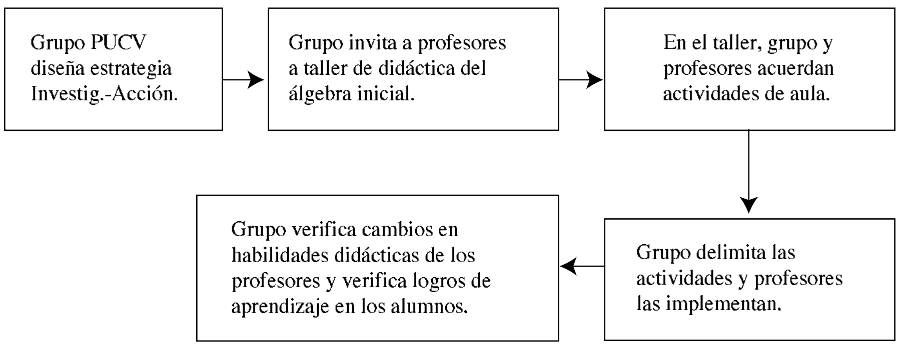
Objetivos: Consecuente con el marco de referencia, el grupo postuló como hipótesis que los profesores renovarían sus prácticas de enseñanza a partir de la reflexión y el apoyo ofrecido por los especialistas en posesión del saber didáctico de la disciplina. El apoyo afectaría la comprensión y por ende implementación de sus prácticas de enseñanza y los logros de aprendizaje de sus alumnos. Así, el objetivo práctico de la investigación-acción fue el robustecimiento del saber didáctico de los profesores para así mejorar la enseñanza y los aprendizajes en la iniciación al álgebra escolar, y el objetivo teórico fue la construcción de ese conocimiento didáctico en torno a la iniciación al álgebra escolar. Planteándose los siguientes objetivos específicos:

a. Favorecer la construcción de conocimientos didácticos situados en dos profesoras en torno a la iniciación al álgebra, recogiendo evidencias de ello, y
b. Desarrollar en los alumnos un pensamiento algebraico de nivel superior en la iniciación al álgebra, recogiendo evidencias de ello.

Sujetos: Cuatro profesoras de matemática participaron en la experiencia. Sólo dos fueron consideradas para los análisis que siguen en este reporte. Las dos profesoras realizaban clases en primero medio en colegios urbanos, uno particular pagado y otro particular subvencionado, de la Comuna de Viña del Mar. Ambas participaron de manera voluntaria en la experiencia y contaron con el apoyo de sus instituciones, las que formalizaron su adhesión al proyecto con un pequeño aporte económico.

Figura 2

Esquema de las etapas de la investigación-acción emprendida



Marco metodológico: El centro de la investigación-acción lo constituyó la construcción de secuencias de enseñanza utilizando nociones de didáctica acordadas en un taller con profesores de aula. Una vez diseñado el taller se invitó a que profesores de la cercanía participaran en él. Combinando práctica y teoría, se trabajó en el taller bajo el supuesto de que el conocimiento didáctico del profesor es situado. Tras delimitar con los profesores participantes los temas a tratar en el aula, fueron construidos los criterios e instrumentos para valorar el éxito de la experiencia. Así, de manera traslapada, se procedió a especificar los saberes didácticos a poner en juego en el aula y los aprendizajes a desarrollar en los alumnos.

Criterios para la elaboración de instrumentos: Se utilizaron técnicas cualitativas para recoger evidencias de los logros del estudio. Estas técnicas se limitaron a identificar la autopercepción de las profesoras con respecto a sus aprendizajes en didáctica y a caracterizar los aprendizajes de orden superior de los alumnos.

a. La delimitación del conocimiento didáctico a desarrollar en las profesoras se plasmó en una tabla que iluminó las actividades de reflexión con ellas, las hojas para el trabajo en aula con los alumnos y la evaluación de los aprendizajes en didáctica de las profesoras realizada. La tabla consideró tres categorías, a saber: habilidades metamatemáticas, habilidades que favorecen la conceptualización y actitud didáctica.

Tabla 1

Especificación de los conocimientos y habilidades didácticas consideradas para la preparación y gestión de las clases o lecciones propuestas

Habilidades y Conocimientos Didácticos	
Habilidades meta-matemáticas: No dependen de un concepto matemático específico.	1. Facilitar adquisición de destrezas de resolución de problemas y la capacidad para razonar. 2. Atender a preguntas de alumnos relativas a los contenidos matemáticos. 3. Incentivar la formulación de conjeturas y validaciones de los alumnos. 4. Favorecer la conversión y/o tratamiento de las representaciones de los objetos matemáticos. 5. Incentivar la reflexión sobre procedimientos de pensamientos propios y de los pares, y crear instancias para compartir.
Habilidades que favorecen la conceptualización: Dependen de los conceptos específicos.	1. Tener conciencia de los errores de concepto usuales y las maneras de enfrentarlos. 2. Responder perceptivamente y con flexibilidad a las diferentes dificultades en matemática de alumnos. 3. Flexibilizar la enseñanza al visualizar formas alternativas de entrar en una misma idea o problema. 4. Representar ideas importantes en una forma que las haga entendible. a. Generar analogías para explicar ideas. b. Generar representaciones. c. Ofrecer problemas verbales. 5. Bosquejar las conexiones entre las ideas matemáticas. 6. Distribuir los tiempos para actividades de aprendizaje y de ejercitación. 7. Crear actividades que lleven a diferentes tratamientos, con el fin de crear conflicto entre los alumnos y llamar a la discusión. 8. Realizar actividades que provoquen conflicto intelectual.
Actitud didáctica: Valoración de lo que deben aprender sus alumnos.	1. Privilegiar rol del profesor en la conexión de saberes y descubrimiento, sobre la transmisión. 2. Favorecer la construcción de las ideas matemáticas; la modelación de destrezas y actitudes de investigación y el desarrollo de herramientas de inquisición.

b. La delimitación de los aprendizajes algebraicos y de orden superior a desarrollar en los alumnos se plasmó en una tabla con estándares de contenido y de desempeño elaborados por los investigadores a partir de los objetivos fundamentales, contenidos mínimos y los aprendizajes esperados estipulados en el programa de matemática de primero medio (MINEDUC 1998).

Los estándares referidos al uso de las letras en la iniciación al álgebra y al uso del álgebra para demostrar propiedades de los números aparecen en la tabla 2.

Tabla 2

Estándares de contenido y de desempeño considerados en la preparación de los materiales de instrucción y en la organización de las clases correspondientes

Estándares de contenidos: Qué debe saber y saber hacer (Conocimientos y destrezas).	Estándares de desempeños: Grados de dominio o niveles de logro (Qué nivel de logros es satisfactorio)
Usa lenguaje algebraico para expresar fórmulas, frases o esquemas de situaciones cuantitativas con números conocidos, desconocidos y variables. Usa lenguaje algebraico para generalizar situaciones, expresar conjeturas y establecer patrones numéricos. Interpreta la valoración de expresiones.	(básico) Usa letras para expresar números generalizados y expresar algebraicamente procesos aritméticos básicos. (normal) Muestra facilidad y confianza en el uso de formas simbólicas. (alto) Escribe fórmulas, aclara y hace conciso aseveraciones matemáticas. Utiliza variable. (básico) Reconoce y en casos simples y formula reglas para generar modelos o sucesiones. (alto) Representa y describe fenómenos de variación y cambio. (básico) Interpreta el significado de sustituir letras por números en fórmulas y expresiones simples.
Demuestra propiedades numéricas simples usando lenguaje algebraico.	Indicadores (alto) Utiliza adecuadamente la lógica, las definiciones de los objetos y de las relaciones matemáticas, las hipótesis y tesis para demostrar propiedades de los números pares, impares, la suma y otros. (alto) Demuestra propiedades de divisibilidad, múltiplos y divisores comunes, usando el lenguaje algebraico, hipótesis, propiedades asumidas y la tesis.

Estos fueron los estándares tenidos en cuenta al analizar las respuestas de los alumnos en las entrevistas y decidir el nivel de logros de aprendizaje alcanzados tras las actividades basadas en las hojas de trabajo propuestas por el grupo de investigación.

INSTRUMENTOS DE MEDICION:

a. Para valorar los aprendizajes en didáctica el Grupo de investigadores elaboró un cuestionario con 4 ítemes conforme a una escala tipo Likert y un ítem abierto para su aplicación a las profesoras al finalizar la experiencia.
b. Para medir el impacto de la experiencia en el saber de los alumnos acerca del álgebra elemental y del desarrollo de un pensamiento algebraico de orden superior se utilizaron entrevistas y cuestionarios que variaron según los grupos cursos y los temas tratados. En el caso de los alumnos del colegio particular subvencionado fue posible aplicar un test estandarizado a todo el grupo curso, la versión en español

del test de Orleans Hanna (Villagrán 1996). Lo que permitió apreciar los resultados desde una perspectiva más estandarizada. También se aplicaron entrevistas y un cuestionario a un grupo focal. En el caso de los alumnos del colegio particular pagado, donde fueron tratadas demostraciones de las propiedades de los números utilizando lenguaje algebraico, sólo fue posible aplicar entrevistas en profundidad en un grupo focal. El grupo focal de cinco alumnos fue elegido por la profesora, barriendo el espectro de habilidades para la matemática según su apreciación.

FASE DE ACCION

Antes de intervenir en el aula, el plan de acción contempló un trabajo de taller con las profesoras y un trabajo de preparación de materiales tanto para el taller como para el aula por parte del grupo de investigación. Ambas actividades son descritas a continuación:

Trabajo previo a la intervención en el aula: Los investigadores, además de preparar el taller con profesores, prepararon material de enseñanza para los alumnos de las profesoras que participaron en el taller. En efecto, una vez que las profesoras expusieron los temas de álgebra que trabajarían en las semanas siguientes con sus alumnos de primero medio, el grupo de investigación preparó una intervención situada, esto es, acorde a la realidad de cada curso. Los investigadores, en coordinación con las profesoras, elaboraron materiales para los alumnos e instrucciones para la gestión de las clases.

Para el curso del colegio subvencionado se diseñaron actividades que introducen el uso de letras como incógnita y como variable, y que introducen el lenguaje algebraico con su dimensión sintáctica y semántica. De modo que el lenguje algebraico tuvo sentido para los alumnos, situación que no había considerado la profesora en la enseñanza del álgebra los años anteriores. La bibliografía consultada incluyó los trabajos de Villagrán y Olfos (2001), Mac Gregor y Price (1999), Nathan y Koedinger (2000) y de Hart (1981).

Para el colegio particular pagado se diseñaron actividades acerca de las demostraciones. La profesora reconoció que el tema de las demostraciones, si bien aparece en los programas, nunca había sido tratado por ella en clases. El grupo de investigación preparó el material correspondiente usando como base el trabajo de Healy y Hoyles (2000).

El grupo de investigación implementó un sitio web para facilitar la comunicación y cooperación entre los investigadores y profesoras participantes. Todo este trabajo en colaboración con las profesoras, más allá de favorecer el aprendizaje de los alumnos, fue diseñado para favorecer la construcción de conceptos y habilidades didácticas en las mismas profesoras.

El taller con profesores: El grupo de investigación preparó un taller: decidió los objetivos, preparó los temas y materiales, estableció la convocatoria y la modalidad de participación de los docentes: número de sesiones, periodicidad y fechas de trabajo. En el taller participaron las dos profesoras, favoreciendo en ellas la comprensión de la didáctica del álgebra elemental. El taller constó de tres sesiones realizadas a intervalos de 15 días, las cuales involucraron tareas compartidas a través de una plataforma virtual.

Primera sesión: Al inicio se informó el objetivo de la investigación-acción y la metodología del taller. Luego fueron explicados algunos aspectos críticos de la iniciación al álgebra escolar presentes en la literatura actual. Finalmente hubo una reflexión entre pares con respecto a las prácticas de enseñanza usuales y a las posibilidades de enriquecer la enseñanza del álgebra con nuevos enfoques, teniendo presente las recomendaciones de la literatura. La reflexión tuvo una orientación práctica y discutió cómo podrían hacerse innovaciones en las aulas propias atendiendo a las sugerencias de la literatura con respecto al desarrollo del pensamiento matemático de nivel superior en sus alumnos.

Segunda sesión: Las profesoras identificaron los temas que tratan con sus alumnos y aquellos que no los tratan a pesar de estar establecidos en los programas de estudio. Los investigadores propusieron los temas a innovar en el aula y la forma de hacerlo. Las profesoras expresaron sus preferencias y se establecieron acuerdos para las distintas aulas. En el establecimiento particular subvencionado se acordó integrar aspectos sintácticos como semánticos en el estudio del lenguaje algebraico; en uno de los establecimientos particular pagado se decidió incluir actividades de demostración de propiedades numéricas usando lenguaje algebraico. Los investigadores establecieron los saberes didácticos situados que se considerarían para enriquecer la actividad en el aula, a saber: el reconocimiento de los conceptos y destrezas del álgebra elemental que son difíciles de aprender por los alumnos, el reconocimiento de obstáculos didácticos asociados al aprendizaje de saberes específicos del álgebra elemental y la identificación de los saberes que requiere poner en juego un alumno para la adquisición de aprendizajes referidos a la iniciación al álgebra escolar.

Tercera sesión: Las profesoras y los investigadores conversaron sobre los materiales de enseñanza que estaban utilizando con los alumnos y sobre su impacto en los aprendizajes de los alumnos.

El trabajo de las profesoras en el aula: La intervención en el aula varió en cada colegio en cuanto a su duración y a la temática tratada. El trabajo en el colegio particular subvencionado se extendió por 6 horas de clases durante las cuales se implementaron 4 fichas de trabajo. Una de ellas se refiere al uso de letras en el proceso de generalización, la cual se muestra, a modo de ejemplo, con las instrucciones para el alumno y para el docente. Las otras fichas se refirieron al uso de letra para representar números, a situaciones en que las letras no representan números sino abreviaciones, objetos o unidades de mediada entre otros usos y a los distintos significados que pueden tomar las expresiones algebraicas.

El trabajo en el colegio particular pagado se restringió a 2 horas de clases durante las cuales se implementaron 2 fichas de trabajo. Considerando la complejidad de aprender a demostrar, se plantearon objetivos restringidos; a saber, que los alumnos diferenciaran entre los datos dados y la proposición a demostrar, que diferenciaran entre una verificación y una demostración general, que reconocieran que una demostración puede ser formulada en distintos registros y utilizando distintas propiedades de base, y que una demostración es un proceso deductivo que parte de datos que se asumen válidos o ya conocidos y que lleva a nuevas relaciones o propiedades.

Cuadro 1

Esquema con los elementos que describen una clase referida
al uso de letras para representar números y categorías de números

Marco para la Clase

Núcleo temático: Traducir al lenguaje algebraico relaciones cuantitativas.
Contenido: Uso de las letras.
Aprendizajes esperados:

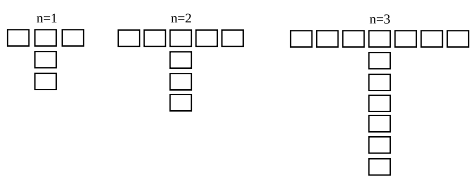
- Usan letras para representar números. Evalúan expresiones.
- Representan categorías de números por medio de expresiones algebraicas.

Tiempo Determinado: Una hora pedagógica.

Instrucciones:
Se entrega ficha individual al alumno, la cual plantea la siguiente actividad e instrucciones:

- Resuelvan las letras a), b) y c) de manera individual.
- Al cabo de unos 15 minutos júntense en grupos para comparar sus respuestas. Esto debe ocurrir sin desorden, de modo que no interrumpa el trabajo de sus compañeros.
- Resuelvan la letra d) de manera grupal.
- Tras unos 10 minutos, escojan un representante del grupo para que explique a qué expresión llegaron.
- El profesor preguntará qué estrategias utilizaron para llegar a una expresión algebraica.

Actividad:
I. Aquí tienes una sucesión de figuras:



a) Dibuja la figura siguiente.
b) Describe con tus palabras las figuras de manera que cualquier persona sin verlas pueda dibujar la sucesión.
c) ¿Cuántos cuadrados en total serán necesarios para formar la figura que ocupa el lugar número 4? ¿Cuántos para el lugar número 39?
d) Encuentra una expresión que sirva para calcular el número total de cuadrados necesarios para obtener una "T" cualquiera de la sucesión.

Rol del profesor
En la primera etapa, donde los alumnos trabajan de manera individual el profesor:

- Velar porque los alumnos trabajen de manera individual, como en una prueba.
- Contesta preguntas de los alumnos, sin darles pistas de un camino de solución.
- Devuelve las preguntas, poniendo al alumno en una situación problema interesante de resolver.

Cuando los alumnos se agrupan es importante que el profesor:

- Evite el desorden en la sala. Procure que los alumnos se agrupen con los compañeros cercanos.
- Plantee la última actividad para que los alumnos discutan sus formas propias de resolución.

Para la exposición de los alumnos el profesor:

- Se fijará con anticipación en los grupos que resolvieron la actividad de manera distinta para que en las exposiciones se reflexione ante distintas estrategias utilizadas.

Cuadro 2

Hoja de trabajo para uso de los alumnos en el estudio de las demostraciones de propiedades numéricas usando lenguaje algebraico

Actividad 1. Arturo, Karen, Angel y Sergio intentaron probar si la afirmación siguiente era o no verdadera. **“Si sumas 3 números consecutivos cualquiera, siempre obtienes un número múltiplo de tres”**

Respuesta de Arturo:
“a” es cualquier número entero.
“b” es a+1, consecutivo con a.
“c” es b+1 consecutivo con b.
La suma a + b + c es a+b+(b+1)
Es decir, a + (a+1) + (a+1 + 1)
Sumando, es 3·a + 3, esto es, un múltiplo de 3 más 3. Lo que también es múltiplo de 3.
Así Arturo dice “esto es cierto”.

Respuesta de Karen:
Los múltiplos de 3 son números que se escriben como “3 por algún número”. Cuando tú sumas un número natural cualquiera con su antecesor y su sucesor, tienes tres veces el número, menos 1 y más 1. Así que es 3 veces el número, lo que es un múltiplo de 3.
Así Karen dice “esto es cierto”.

Respuesta de Angel
Sean a con b números consecutivos. Sean n con m consecutivos. Y sean x con y consecutivos.
Entonces b = a+1
m = n+1
y = x+1
Luego b+m+y = a+n+x+3
Así (b+m+y) – (a+n+x) =3
Así Angel dice “esto es cierto”.

Respuesta de Sergio

••••• •••• ••••••
\+ +
••••• •••• ••••••
••••• •••• ••••••
=
•••••••••••••••••••••

Así, Sergio dice “esto es cierto”.

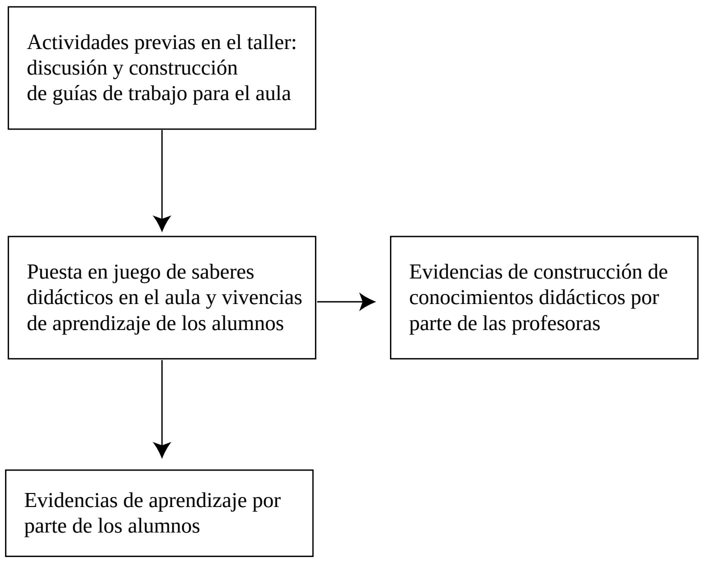
- En relación a las respuestas anteriores, elije la más cercana a la que tú hubieses hecho si te hubiesen pedido responder a esta interrogante. La respuesta de: ______________
- En relación a las respuestas anteriores, elije aquella que tu profesor le pondría mejor nota.
La respuesta de: ______________
- Comparte y discute tus respuestas con tu compañero y luego con el curso

FASE DE EVALUACION Y REFLEXION

Mientras las profesoras llevaron adelante las secuencias de enseñanza utilizando los materiales construidos por los investigadores conforme a los acuerdos del taller, el grupo de investigadores preparó entrevistas y cuestionarios para evaluar el impacto de la experiencia en las profesoras y en los aprendizajes de los alumnos.

Figura 3

Focos de la evaluación en los aprendizajes de los alumnos y en los conocimientos didácticos de las profesoras



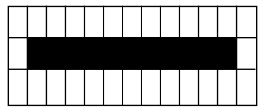
Evidencias de aprendizaje en los alumnos: Las evidencias de aprendizaje fueron captadas de manera distinta en cada grupo curso. En el colegio subvencionado fue posible aplicar la versión en español del test estandarizado “Orleans Hanna Prognosis Test” (Villagrán 1996), que predice el éxito de un alumno en un curso de álgebra. Ello proveyó un dato del nivel de aprendizaje alcanzado en álgebra por los alumnos, en comparación a otros grupos. En un estudio realizado en La Serena, se obtuvo una puntuación promedio de 25,1 puntos en establecimientos subvencionados y 45,7 en colegios particulares (Villagrán 1996). En esta experiencia, el curso obtuvo una media de 37,6, significativamente mayor que los resultados de sus pares. También se valoró el aprendizaje de los alumnos a partir de una entrevista y un cuestionario aplicado a dos alumnas. Frente a la pregunta ¿qué es una incógnita? **Soledad** responde “Algo que no se conoce. Por ejemplo, tenemos cierta cantidad de tarros, pero no sabemos cuánto es. Entonces la letra representa la cantidad no conocida”. Frente a la pregunta: “Si el lado de un cuadrado mide A centímetros, ¿cuál es su perímetro?”. **Trini** responde “4 A”. El investigador preguntó ¿Qué representa la letra A?. **Trini**: “A representa al lado”. **Soledad** responde: “A es la medida del lado”. Investigador: ¿A es un número fijo o uno variable? **Soledad** responde con inseguridad “Es variable, la profesora nos enseñó que podía ser cualquier número”. La entrevista muestra que las niñas entienden. Las respuestas al cuestionario también fueron acertadas. Ante la pregunta ¿cuántas baldosas blancas necesitas para rodear n baldosas negras? (ver figura 4). **Trini** responde acertadamente “2n+6”.

¿Cuántas baldosas blancas necesitas para rodear n baldosas negras?

Figura 4

Pregunta del cuestionario a dos alumnas del colegio subvencionado.

¿Cuántas baldosas blancas necesitas para rodear n baldosas negras?



Los siguientes párrafos se refieren a las evidencias de aprendizaje sobre las demostraciones en los alumnos del colegio particular, aprendizajes que si bien están contemplados en los programas de estudio, no forman parte de la enseñanza tradicional del álgebra elemental. La evaluación se realizó a partir de un grupo focal. La profesora dio a los investigadores la posibilidad de entrevistar individualmente a cinco alumnos. Los alumnos fueron seleccionados por ella a partir de la solicitud de los investigadores en cuanto a considerar un espectro entre alumnos del curso que les ha sido fácil aprender matemáticas y alumnos que les ha sido difícil. Las entrevistas se centraron en tres temas. El primer tema de la evaluación se refirió al concepto de demostración. El segundo tema se focalizó en la valoración de distintas demostraciones frente al enunciado de una proposición. La labor del entrevistador fue garantizar que los alumnos entendieran las preguntas, animar a los alumnos a responderlas y vigilar que el sentido de las respuestas fuera claro para el entendimiento de los investigadores en el momento del análisis posterior. El tercer y último tema de la entrevista se refirió a la elaboración de demostraciones por parte de los entrevistados, frente a dos enunciados de propiedades de los números.

Las respuestas de los alumnos frente a la pregunta inicial *"¿Qué puedes decir de las demostraciones?"* deja ver que para los alumnos una demostración, más que constituir una deducción de propiedades a partir de datos conocidos es un fundamento que da al enunciado un estatus de validez, lo cual expresan con términos como verificación, afirmación de la afirmación, propiedades que ayudan a entender y explicación de una propiedad, lo cual consideramos de un nivel conceptual aceptable, puesto que intencionalmente los investigadores optaron por no introducir la idea de teoría formal en el proceso de enseñanza.

Tabla 3

Respuestas de los alumnos a parte de la evaluación de sus aprendizajes

Parte 1 de la Evauluación (Tema: Demostraciones. Colegio: Particular pagado)

Pregunta planteada a los alumnos: *"¿Qué puedes decir de las demostraciones?"*

Respuestas de los cinco alumnos entrevistados:

- **Rodrigo:** *"Una demostración es verificar una teoría u oración. Esto en realidad NO lo aplico mucho cotidianamente, pero me sirve más que nada en las pruebas de matemática cuando algo no me queda muy claro, para poder entender mejor".*
- **David:** *"Una demostración sirve para afirmar una afirmación para saber si es verdadera o falsa, siempre y cuando tenga argumento. No puedo decir que es falso sin saber por qué".*
- **Nilsson:** *"Son las propiedades matemáticas que nos ayudan a entender los distintos problemas y ecuaciones que se nos presentan".*
- **Javier:** "*Explicar una propiedad matemática a través de números, letras o ambas. Sirve para aplicar las fórmulas aprendidas anteriormente*".

Las respuestas de los alumnos a la segunda parte de la evaluación dan evidencias de que son capaces de comprender una demostración, darse cuenta cuándo es correcta y cuándo es incorrecta o sólo se trata de una verificación.

Cuadro 3

Esquema de parte de la evaluación aplicada a los alumnos sobre demostraciones de propiedades numéricas usando lenguaje algebraico

Parte 2 de la Evauluación (Tema: Demostraciones. Colegio: Particular pagado)

Tres alumnos de distintos colegios trataron de probar la siguiente afirmación:
"Cuando elevas un número impar al cuadrado, el resultado es siempre un número impar"

Las respuestas de los alumnos fueron las siguientes:

Respuesta de alumno uno: $1^2 = 1$ $3^2 = 9$ $5^2 = 25$ $7^2 = 49$ Así sucesivamente se cumple que el cuadrado de un número impar es un número impar.	Respuesta de alumno dos: Sea $(2n + 1)$ un número impar, donde n es algún número entero. $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ $= 2 (2n^2 + 2n) + 1$ Donde $(2n^2 + 2n)$ es algún numero entero k $=2k + 1$ Entonces $(2n + 1)^2$ es un número impar

Respuesta de alumno tres:
Los números impares terminan en 1, 3, 5, 7, 9. Cuando tú elevas al cuadrado cualquier número de este tipo, el resultado seguirá terminando en 1, 3, 5, 7, 9

Tabla 4

Respuestas de los alumnos a parte de la evaluación de sus aprendizajes

"Cuál(es) de las respuestas es (son) la(s) más cercana(s) al concepto que tienes de demostración"	*"Elige la(s) respuestas más cercana(s) al concepto que tienes de verificación"*
Los investigadores consideran correctas las respuestas de los alumnos 2 y 3. Las respuestas de los alumnos entrevistados fueron: • Rodrigo y David consideran la respuesta del alumno 2 • Camila considera la respuesta del alumno 1 • Nilsson considera las respuestas de los alumnos 2 y 3 • Javier considera las respuestas de los alumnos 1 y 3	Los investigadores consideran correcta la respuesta del alumno 1. Las respuestas de los alumnos entrevistados fueron: • Rodrigo, Camila y Javier eligieron la respuesta del alumno 1 • David eligió la respuesta del alumno 2 • Nilsson eligió las respuestas de los alumnos 1 y 3

Las respuestas de los alumnos a la tercera parte de la evaluación dan evidencias de las dificultades que tienen los alumnos para demostrar. En esta tercera parte los alumnos debían demostrar dos propiedades de los números. La primera pregunta aparece en el cuadro 4.

Cuadro 4

Un enunciado de la parte 3 de la evaluación aplicada a los alumnos sobre demostraciones de propiedades numéricas usando lenguaje algebraico

Parte 3 de la Evauluación (Tema: Demostraciones. Colegio: Particular pagado)
Demuestra la siguiente propiedad utilizando los datos dados: *"Si sumas tres números pares consecutivos, el resultado es siempre múltiplo de 6"* *Datos:* $2n$, $(2n + 2)$, $(2n + 4)$ *son números pares consecutivos.*

Los alumnos entrevistados dejaron ver falencias en sus intentos de demostración. **David** abordó mal el problema, pues multiplicó en vez de sumar las expresiones. Luego escribió "no sé dar el paso que sigue". **Nilsson** también quizo dar una verificación de la propiedad usando números, pero se equivocó en la prioridad de las operaciones aritméticas. Estas respuestas dejan en evidencia que incluso en este colegio particular de alto rendimiento en la PSU los alumnos no son capaces de usar bien las propiedades aritméticas ni algebraicas en contextos en que las letras tienen significados.

Las respuestas de **Rodrigo** y **Javier** son más acertadas. Sin embargo en ambas se constata que no saben usar el "dato implícito" o definición "un número es múltiplo de 6 si se puede escribir de la forma 6*k, donde k representa a un número natural".

En efecto, **Rodrigo** sumó los tres números. $2n+2n+2+2n+4 = 6+6n$. Pero continuó con una verificación, escribiendo: "$2{\cdot}6$ = *12+6 = 18 es múltiplo de 6 y* $5{\cdot}6 = 30+6 = 36$ *es múltiplo de 6"*. Concluyendo: *"al sumar tres números pares consecutivos, el resultado será múltiplo de 6"*.

Javier sumó los tres números consecutivos $2n+(2n+2) + (2n+4)$ expresando en factores cada uno de ellos $2n+(2(n+1)) + (2(n+4)))$. Luego anuló su trabajo rayándolo. En un costado de la hoja unió con una flecha los tres números consecutivos y escribió:

> *"Todos son números pares (al sumarlo voy a seguir con un número par), y si tengo que sumar tres números pares consecutivos, el resultado va a ser un número divisible por 3 también, por ejemplo:* $2+4+6=12$. $2{\cdot}6 = 12$ *y 12 es divisible por* 2. $3{\cdot}4 = 12$ *y 12 es divisible por 3. Todo número divisible por 6 es divisible por 2 y 3 a la vez".*

En síntesis, los alumnos entienden qué se espera de ellos cuando se les pide una demostración y reconocen que la verificación es insuficiente como demostración. Sin embargo, tienden a recurrir a la verificación como mecanismo de prueba cuando encuentran dificultades. Esto último probablemente está asociado al hecho de que en la vida y en las ciencias experimentales la verificación es el método de prueba estándar, enfrentándose los alumnos a un problema epistemológico no menor.

Las dificultades encontradas por los alumnos fueron de distinta naturaleza, según se aprecia en las evidencias precedentes. El análisis de ellas da cuenta de la falta de comprensión de los alumnos en el uso de las letras, y da pie para que la profesora retroalimente ese aspecto en la enseñanza del álgebra, cuestión que los investigadores en didáctica ya han señalado necesario hacer.

Evidencias de la construcción del saber didáctico de las profesoras: La construcción de conocimientos y habilidades didácticas en las profesoras fue un propósito central de la investigación. A partir de la revisión de literatura, los investigadores identificaron tres categorías del saber didáctico sobre las cuales construyeron el listado de conocimientos y habilidades didácticas puesto en juego en este estudio. La investigación favoreció que las profesoras pusieran en juego los principios, habilidades y conocimientos que los investigadores privilegiaron como "saberes didácticos que garantizan el logro de aprendizajes de calidad en los alumnos con respecto a la iniciación del álgebra". En tal sentido, la investigación-acción se adhirió a un modelo de "inmersión", que privilegió el "aprender haciendo" de las profesoras en el seno de sus prácticas instruccionales cotidianas.

El criterio usado para validar estos supuestos fue la opinión de las profesoras participantes, quienes teniendo como antecedente el éxito de sus propias prácticas apoyadas en los principios mencionados, respondieron a un instrumento como el presentado en el cuadro 5.

La aplicación del instrumento dio un resultado muy favorable. Las dos profesoras estuvieron Totalmente de Acuerdo (TA) o De Acuerdo (A) en todos los ítemes. Sólo en el tercer ítem (ver cuadro 5) la profesora que trabajó el tema de las demostraciones eligió la alternativa "De acuerdo". Con respecto a las preguntas del recuadro de abajo, sus respuestas fueron "no", "sí", "no" y "sí", respectivamente.

Las profesoras quedaron satisfechas con los aprendizajes logrados, y pese a que se les insistió de que no era necesario que sus evaluaciones fueran tan positivas y que sus opiniones ayudarían a mejorar el trabajo futuro, mantuvieron sus respuestas.

Perspectivas hacia el futuro: Si bien la experiencia fue exitosa tanto desde la perspectiva de los aprendizajes de los alumnos como de los saberes didácticos de las profesoras, existen limitaciones en cuanto a la reproducibilidad y persistencia de los efectos en el tiempo. Las condiciones de trabajo de los profesores son adversas para la reflexión y la preparación de sus clases. Los profesores requieren tiempo, apoyo entre pares y un acercamiento a los resultados de la investigación en didáctica que es incipiente.

La experiencia permitió la construcción de instrumentos que en una investigación futura pueden ser expuestos a la validación con más casos a desarrollar en contextos y condiciones similares. Paralelamente parece apropiado poner a prueba los materiales y principios puestos en juego en este estudio con actores distintos a los investigadores, con el objeto de despersonalizar el éxito de la experiencia y recoger evidencias de su alcance.

Otra recomendación es tener presente el carácter situado o local de las propuestas didácticas, las cuales están muy ligadas a las caraterísticas particulares del contenido matemático en juego. Esto es, existen características propias del contenido matemático que pareciera no permitir desarrollar por ejemplo una habilidad genérica para "demostrar". Independiente del área en cuestión. Frente a lo cual, es de relevancia disponer de un sitio web amigable que facilite a los profesores acceder a este conocimiento tan

Cuadro 5
Instrumento utilizado para recoger la opinión de la profesora
con respecto al efecto de la experiencia en sus saberes didácticos

Mejoramiento de las habilidades didácticas

Procedimiento para responder el instrumento
El instrumento consta de dos partes, en los casos donde deba responder a un conjunto de proposiciones, marque su opción con una cruz de acuerdo a la escala:

Escala

TA:	Totalmente de Acuerdo
A:	De Acuerdo
I:	Indiferente
D:	En Desacuerdo
TD:	Totalmente en Desacuerdo

Tras su participación en el proyecto:

Proposiciones	TA	A	I	D	TD
Adquirió mayor habilidad para generar actividades que incentiven la formulación de conjeturas por parte de los alumnos.					
Adquirió habilidad para incentivar la validación de conjeturas por parte de los alumnos.					
El material entregado a sus alumnos y la forma en que se trabajó en clases favoreció su habilidad para hacer adquirir en sus alumnos destrezas para demostrar.					
El material trabajado en clases favoreció su comprensión de los errores conceptuales de los alumnos y de los obstáculos presentes en las tareas relativas a demostraciones.					
El material entregado le enseña a usted a flexibilizar la enseñanza, visualizando formas alternativas de estudiar el concepto de demostración.					
Mostrar al alumno demostraciones correctas e incorrectas es útil para iniciar el estudio de las demostraciones; no lo había hecho antes, y es muy probable que lo haga en el futuro.					

Proposiciones	**Sí**	**No**
En años anteriores trabajo el tema de demostraciones		
El próximo año trabajará el tema de demostraciones		
¿Tuvo efectos negativos el trabajo con demostraciones?		
¿Tuvo efectos positivos el trabajo con demostraciones?		

local y poco desarrollado que existe en la actualidad con respecto a la didáctica del álgebra elemental.

Es reconocido que el conocimiento didáctico es altamente demandado por los profesores en los cursos de perfeccionamiento docente. El conocimiento didáctico es el saber más próximo al quehacer profesional cotidiano de los docentes, pero paradójicamente existe escaso desarrollo teórico del mismo y ha sido tangencialmente tratado en la formación inicial docente, en virtud de lo cual la difusión de esta experiencia es de gran valor.

Si bien no podemos saber si en el futuro la profesora incluirá demostraciones en las iniciación al álgebra, ella puede afirmar que la experiencia le permitió confirmar que el tratamiento es posible con perspectivas exitosas. Posiblemente la exigencia por “tratar contenidos y habilidades” que son medidas en pruebas estandarizadas como el SIMCE lleve a la profesora a desechar el tratamiento de las demostraciones de propiedades numéricas usando lenguaje algebraico, lo que está asociado a factores estructurales del sistema educativo, el cual irá transformándose en la medida que se vislumbren mejores formas de articular el quehacer docente en el país. Independiente de las circunstancias, la experiencia proveyó a la profesora de un conocimiento didáctico acerca de las demostraciones, una actitud y una visión que se muestra favorable a la implementación de un currículo más completo, más complejo, de nivel cognitivo superior y en concordancia con los programas de estudio.

La literatura internacional muestra escasos trabajos en relación al conocimiento didáctico y el disponible sólo se ha trabajado de manera local sin que existan instrumentos validados que permitan medir la evolución de este conocimiento en los profesores. Atendiendo a este nivel de desarrollo teórico del tema en cuestión, este estudio se centró en la identificación de varios saberes didácticos locales o situados que han sido caracterizados por los teóricos de la “didáctica fundamental” francesa en los últimos 30 años y de otros saberes de naturaleza similar que constituyen los principios más recurrentes de los teóricos del “pedagogical content knowledge”.

REFERENCIAS

Arievitch, I. y A. Stetsenko (2000). The quality of cultural tools and cognitive development. *Human Development* 43. 2: 69-92.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques.* 7 2: 33-115.

Colás, M. P. (1994). La investigación-acción. En Colás, E. y Buendía, L. (391-315). *Investigación Educativa* Sevilla: Alfar.

Baldor, A. (1999). *Algebra. Publicaciones Cultural*. 17ª reimpresión, México,

De Corte, E. (2000). High-powered learning communities: a European perspective. Keynotes address presented to the First Conference of the Economic and Social Research Council’s Research Programme on Teaching and Learning. Leicester, Jun. 9-10 (citado 26 enero 2005). Extraído de http://www.tlrp.org/acadpub/Corte2000.pdf

Doherty, R.W.; R.S. Hilberg, G. Epaloose, R.G. Tharp (2002). Standards performance continuum: Development and validation of a measure of effective pedagogy. *The Journal of Educational Research* 96. 2: 78-89.

Ferrada, D. y A. Villena (2005). The construction of pedagogic meanings in work professional groups. *Estudios Pedagógicos* 31. 2: 7-25.

Fisher R. (2005) (2nd ed). *Teaching Children to Think*. Cheltenham: Stanley Thornes.

Hart, K.M. (1981). *Ed. Children Understanding of Mathematics: 11-16. The CSMS Mathematics Team*. London. John Murray (Publishers).

Healy, L. y C. Hoyles (2000). A study of Prof. Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathemathic Education* 31. 4: 396-428.

Isoda, M., A. Arcavi, A. Mena (en prensa). *El estudio de clases japonés en matemáticas: Su impacto, diversidad y potencialidad para el mejoramiento educcional*. Valparaíso: Ediciones Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Mac Gregor, M. y E. Price (1999). An Exploration of aspects of Language Proliciency and Algebra Learning. *Journal for Research in Mathemathic Education* 30 (4): 449-467.

Marcel, M. y C. Tokman (2005). ¿Cómo se financia la educación en Chile? Estudio de Finanzas Públicas Nº 5, Ministerio de Hacienda, Chile. Extraído de www.dipres.cl/publicaciones/Financiamiento%20de%20la%20Educacion.pdf el 3 de mayo de 2007.

Middleton, M. J. and P. Blumenfeld. (2000). Types and sources of academic press in middle school science classrooms. Paper presented at AERA Meeting. Spring, 2000. Extraído de http://www-personal.umich.edu/~krajcik/Types&Sources.pdf el 5 de abril de 2007.

MINEDUC (1998a). *Marco Curricular de la Educación Media*. Ministerio de Educación: República de Chile.

MINEDUC (1998b). *Matemática. Programa de Estudio. Primero medio*. Ministerio de Educación: República de Chile.

Nathan, M. y K. Koedinger (2000). Teachers' and Researchers' Beliefs About the Development of Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathemathic Education* 31. 2: 168-190.

Olfos, R. (2005). *La iniciación al álgebra escolar: una tradición que no cambia*. XVIII Encuentro Nacional de Investigadores en educación CPEIP, MINEDUC. Barnechea Chile. Noviembre.

Olfos, R. (2004). *Aportes de la investigación a la enseñanza del álgebra elemental*. XII Jornadas Nacionales de Educación Matemática. SOCHIEM Valparaíso. Noviembre 2004.

Pasmanik, D. y R. Cerón (2005). Classroom teaching practices as a starting point for the teaching-learning processes analysis: a case study in chemistry. *Estudios pedagógicos* 31 (2): 71-87.

SHON, D.A. (1983). *The reflective practitiones. How professionals think in action*. Londres: Temple Smith.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching. Foundations of the new reform. *Harvard Education Review* 57. 1: 37-42.

Stenhouse, L. (1988). *Investigación y desarrollo del currículo.* 2a. edición. Madrid: Morata.

Villagrán, E. (1996). Construcción y validación relativa de un test pronóstico en álgebra para el primer año de enseñanza media. Tesis no publicada para optar al grado de Magíster en Educaión con mención en psicología. Copiapó. Universidad de Atacama.

Villagrán E. y R. Olfos (2001). Actividades lúdicas y Juegos en la iniciación al álgebra. *Revista Integra* 5: 39-50.